PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

Una riflessione, maturatasi durante il decennio fra il 1890 e il 1900, ci ha condotto alla critica di taluni problemi che si riferiscono allo sviluppo logico e psicologico delle conoscenze scientifiche; i quali vengono qui trattati come « problemi della Scienza ».

Il disegno dell'opera può dirsi fissato (all'infuori dell'ultimo capitolo) fino dal 1901, anno in cui cominciammo ad esporre le nostre vedute sull'argomento, in varie lezioni e conferenze; la disposizione formale della materia non ha subìto dopo allora che lievi ritocchi.

Lo spirito generale della trattazione può difficilmente essere spiegato in rapporto alle distinzioni filosofiche delle scuole. Vorremmo caratterizzarlo come critico e positivo ad un tempo, poichè crediamo veramente d'interpretare in modo più chiaro e scientifico, e di conciliare senza transazioni eclettiche, i suddetti indirizzi speculativi da cui fu stimolato agl'inizi il nostro pensiero; ma non ci dissimuliamo che profonde differenze separano le idee esposte in questo libro da quelle che corrono sotto il nome di positivismo critico. La lettura del primo capitolo d'introduzione è già sufficiente a mostrarlo.

Gli argomenti svolti risultano dalle intitolazioni preposte alle varie parti del lavoro, e riassunte nell'indice. Il nesso fra temi così disparati consiste in una veduta d'insieme del processo scientifico, che abbiamo cercato di spiegare con una esposizione induttiva confortata da numerosi esempii.

L'analisi di ciò che costituisce il reale si allarga nel cap. II ad una critica dei fatti e delle teorie, volta a discriminare, per una parte il contenuto positivo della Scienza, per l'altra il suo aspetto subiettivo.

Da questa analisi sorgono due ordini di problemi che vengono successivamente approfonditi: i problemi concernenti la trasformazione logica dei concetti, riguardata come sviluppo psicologico e come istrumento di conoscenza (capitolo III); e quelli che si riferiscono al significato e all'acquisto dei concetti più generali di spazio, tempo, forza, moto ecc. (cap. IV, V).

Le questioni teoriche della Fisica sono prese in esame nel cap. VI, in rapporto ad una critica del meccanicismo, la quale si conchiude con talune osservazioni riferentisi al proseguimento della spiegazione meccanica nei fenomeni della vita.

L'idea che ci formiamo della Scienza non è qui svolta esplicitamente in armonia con un generale sistema filosofico.

Non entra nel nostro quadro esaminare i rapporti fra sapere e volere al di là di quello che richieda la definizione stessa della Scienza. Quindi il valore di questa viene da noi postulato, ed ogni giudizio apprezzativo che vi si riferisca rimane escluso dalla nostra critica.

Non è già che stimiamo il sapere scopo a sè stesso. Vediam bene che « la Scienza per la Scienza » *è formula vuota di contenuto sociale. E d'altra parte che il sapere può porgere alla volontà soltanto i mezzi dell'operare, ma non i fini; che è assurdo cercare nella Scienza le norme della vita.*

Ma riteniamo che la volontà scientifica, all'infuori dello scopo utilitario, ponga essa stessa una norma significativa, quando riconosce, ed afferma il vero *come indipendente dal timore o dal desiderio e promuove così lo sviluppo pieno della persona umana, la coscienza, oltrechè la potenza, di un volere capace di riguardare al di là dei fini transitorii del presente, verso un più alto progresso futuro.*

La fede in questa filosofia scientifica ci ha tratto dai campi della Geometria, ove il pensiero riposa tranquillo nella sicurezza degli acquisti, a discutere sulla preparazione di una scienza gnoseologica che possa divenire oggetto d'intesa degli studiosi, e che porti ad unificare i varii dominii del sapere in una veduta sintetica del procedimento conoscitivo.

Da ciò il disegno di un'opera che, ravvicinando così largamente oggetti

e problemi diversi, oltrepassa le consuetudini della nostra società scientifica e deve quindi suscitare, nel pubblico, naturali diffidenze.

A queste possiamo opporre soltanto la coscienza del lavoro quindicennale. Ma, dove pure la coltura e l'ingegno si mostrino troppo impari all'ardita intrapresa, innalziamo l'animo alla speranza che la fatica non sia stata spesa invano, se la visione evocata dalla unità della Scienza valga ad affratellare in una meta superiore gli sforzi dei giovani, che tendono, in ordini disparati di studio, alla conquista del vero.

Sorga questa visione sopra le differenze della tecnica e della materia, come faro di progresso. E rischiari soprattutto agl'Italiani la via, acciocchè l'opera di rinnovamento, iniziata dai nostri maggiori si prosegua nello sviluppo pieno ed armonioso del genio nazionale.

Maggio 1906.

FEDERIGO ENRIQUES

PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

La prima edizione di questo libro si è esaurita nel giro di tre anni, ed il valoroso editore Zanichelli ha voluto invitarmi ad apparecchiarne una seconda. Frattanto la prima parte dell'opera è stata tradotta in francese; una traduzione tedesca esce in questi giorni, e si sta preparando una traduzione inglese.

Questo successo che ha superato le mie aspettative, mi dà adito a sperare che — dalla diffusa lettura — sorga anche una critica più profonda di quanto costituisce lo scopo principale ed insieme la parte più originale del lavoro: la nuova posizione del problema gnoseologico, che risulta in ispecie dal terzo capitolo e da taluni sviluppi dei successivi, a torto considerati esclusivamente pel loro contenuto scientifico.

Non è già che quello scopo sia sfuggito a tutti i miei critici; lo ha rilevato p. es. P. Boutroux nell'analisi pubblicata dalla Rivista di Scienza *e — particolarmente nelle riviste filosofiche straniere — parecchi vi hanno accennato. Ma la maggior parte dei critici più superficiali, tra i filosofi che hanno esaminato l'opera mia, hanno creduto di potersi limitare ai primi due capitoli, e non hanno veduto affatto la soluzione nuova dei problemi della critica Kantiana, svolta nei successivi.*

Questa seconda edizione riproduce la prima con piccole modificazioni od aggiunte. Avrei desiderato invero di rimaneggiare quelle parti del libro che si riferiscono a teorie scientifiche in formazione. Ma il tempo mi è mancato per questo lavoro, ed ho temuto anche di turbare l'unità del disegno lunga-

mente meditato, coll'accrescere ancora certi sviluppi, aventi valore d'esempio, che hanno già preso troppo posto nella trattazione.

Ho sopperito in parte al sopra indicato lavoro di rinnovamento, coll'aggiungere alcune citazioni, relative in ispecie ad articoli comparsi in questi anni nella Rivista di Scienza.

20 Ottobre 1909.

FEDERIGO ENRIQUES

PREFAZIONE ALLA RISTAMPA DELLA 2ª EDIZIONE

L'opera che agl'inizi del 1906 usciva pei tipi della Casa Zanichelli, ripubblicata in una nuova edizione più copiosa nel 1908, è ormai da varii anni esaurita e — per rispondere al desiderio di molti che mal si adattano a leggerla nelle traduzioni fattene in lingue diverse — l'editore mi ha chiesto di ristamparla.

Questa proposta chiamava naturalmente a riflettere se convenisse riprendere in esame il contenuto del lavoro e recarvi quei perfezionamenti che lo pongano in rapporto coi progressi della Scienza ed anche colle nuove esigenze del mio pensiero.

Infatti, se le idee non sono sostanzialmente mutate, pure la naturale evoluzione di esse ha generato in me una nuova coscienza filosofica, che tende soprattutto ad approfondire l'aspetto storico dei problemi: al lume della quale molti sviluppi dovrebbero qui essere illuminati con nuovo studio. D'altra parte i progressi più recenti di molte teorie fisiche e biologiche contemporanee, che vengono trattate in questo volume, porterebbero a riprenderne e proseguirne la trattazione.

Ma un breve esame mi ha convinto che un rimaneggiamento di tal genere rischiava, o di rompere le proporzioni dell'opera, o di condurmi a scrivere un libro nuovo al posto di quello che ha ormai trovato un posto nella letteratura filosofica della Scienza e a cui, per tale motivo, conviene serbare la fisionomia e il carattere originarii.

Ho dovuto quindi rinunziare all'idea d'una revisione qualsiasi, e — per

quanto concerne il desiderio d'un punto di vista storico — mi limito a rimandare il lettore ad altri libri e in particolare a ciò che è contenuto nel mio libro « Per la storia della logica » edito nel 1922.

Per quel che riguarda invece il progresso delle dottrine, io penso che il loro significato filosofico e gnoseologico, per cui vengono esaminate in questo libro, e però sotto tale riguardo il loro valore, resti in larga misura indipendente dai nuovi sviluppi che possono modificarne il giudizio ai fini d'una valutazione strettamente scientifica. Anche perchè, almeno così all'ingrosso, mi sembra che tali sviluppi abbiano camminato piuttosto nell'ordine d'idee segnato da questa critica: invero lo stretto positivismo che ispirava vent'anni or sono l'indirizzo d'un MACH *o d'un* OSTWALD, *sembra oggimai superato dal magnifico rifiorire di quelle ipotesi rappresentative che codesti pensatori volevano escludere dalla Scienza.*

Ma per una teoria almeno, cioè per la relatività, io sento il bisogno di accompagnare con qualche nota la riproduzione di quest'opera, spiegando un poco il rapporto fra la critica dei concetti e dei principii della Meccanica di cui si discute ampiamente in questo libro e la grandiosa sintesi scientifica che, con EINSTEIN, *ha rinnovato la fisica contemporanea.*

Diciamo dunque che la teoria einsteiniana, al pari d'ogni progresso essenziale della Scienza, non deriva già da esperienze isolate ed accidentali che — corrette o diversamente interpretate — potrebbero condurre a rovesciare tutto il nuovo edifizio, consentendo un semplice sviluppo delle antiche vedute, ma costituisce il termine naturale d'una crisi che si matura lentamente in due secoli di storia. Di fatto confluiscono in questa crisi diversi movimenti d'idee:

1) la critica filosofica dei concetti, che già ai tempi di NEWTON *— nei circoli cartesiani e leibniziani — repugnava ad accogliere l'azione a distanza e lo spazio o il moto assoluto, e che ripresa e spinta anche nel campo geometrico secondo lo spirito positivo della nostra epoca, è riuscita a nuove e più radicali conclusioni;*

2) e lo sviluppo delle dottrine dell'elettromagnetismo durante due secoli, che — attraverso i tentativi d'una spiegazione meccanica e sotto la pressione di sempre più larghe esperienze — ha condotto finalmente ad invertire

i termini tradizionali del problema cosmologico posto dal NEWTON *nella prefazione dei « Principia »* [1].

Ma questi due aspetti concordanti della crisi einsteiniana sono anche inseparabili: coloro che, non avendo lo spirito aperto alla critica di concetti presi ingenuamente come assoluti, disconoscono le esigenze filosofiche della dottrina, si trovano fuori della possibilità di comprenderla, e debbono vedere in essa soltanto dei puri sviluppi matematici formali, un pò artificiosi.

Per contro chi vuole veramente possedere il senso della nuova costruzione ha da penetrare anzitutto il significato filosofico dei suoi principi, che però — a nostro avviso — non richiama una sufficiente attenzione nelle esposizioni matematiche più diffuse della relatività.

Ora la critica dei concetti e degli assiomi della Geometria e della Meccanica, qui ampiamente trattata, può appunto occupare questo posto, costituendo un'introduzione filosofica alla teoria di cui si discorre: tanto più naturalmente in quanto essa è stata concepita, vent'anni or sono, indipendentemente dal nuovo sviluppo e nondimeno — come già è stato rilevato, p. es. dal CANTELLI, *— vi appaiono idee che assumono il loro pieno significato soltanto nella teoria della relatività più generale del 1917.*

Diciamo di più: che forse, per quel che concerne più da vicino i principi della Meccanica, la nostra critica, integrata dalle considerazioni del GIORGI, *può ancora suggerire qualche cosa in rapporto al problema delle « forze », che* EINSTEIN, *ispirandosi alle idee del* MACH, *riduce sistematicamente ad effetti di moti relativi: così almeno sembra al* GIORGI *in seguito ad approfondite riflessioni su cui non è luogo d'indugiare.*

Per queste ragioni, osiamo sperarlo, il lettore potrà trovare qualche interesse a leggere qui l'esposizione dell'argomento, nella forma assunta attraverso un'elaborazione di pensiero, che risale agli anni 1900-905.

Roma, Dicembre 1925.

FEDERIGO ENRIQUES

[1] Cfr. NEWTON, *Principi di filosofia naturale*, con note critiche sullo sviluppo dei concetti della Meccanica, per cura di F. ENRIQUES e U. FORTI, ed. Stock, Roma, 1925, (pag. 24).

CAPITOLO I.

INTRODUZIONE

§ 1. Problemi particolari e idee generali della scienza.

Una duplice fatalità incombe su colui che ha consacrato i suoi giorni alla Scienza.

Se vuol contribuire al progresso di questa, deve prepararcisi innanzi con uno studio paziente dei mille particolari che costituiscono la tecnica; deve apprendere i risultati conseguiti da innumerevoli lavoratori le cui ricerche tendono al medesimo scopo, deve impadronirsi dei loro concetti e sottoporli ad una nuova critica.

Questo lavoro assorbe a tal punto l'attività dell'investigatore, che poco tempo gli resta per gettare uno sguardo sopra altri rami della Scienza che si sviluppano accanto a lui.

Eppure anche questa necessità s' impone al suo spirito.

Se per un lato ei deve coltivare dei problemi speciali, non può esimersi per altro dal giudicare i fini proposti alla ricerca, assurgendo ad un punto di vista generale che sovrasti ad una più larga base scientifica.

La duplice esigenza genera quella contraddizione di tendenze, che, nel nostro sistema di produzione, si traduce in una perdita di tempo e di lavoro, di cui soffre la società intellettuale.

La maggior parte degli investigatori, se non sono convenientemente diretti, si chiudono in un cerchio ristretto, e cadono in un empirismo cieco; altri si smarriscono nella regione delle generalità confuse; pochi spiriti superiori trovano da se stessi la via, e spesso debbono riguardare con nuovi sforzi ciò che avrebbero il diritto di domandare all'opera compiuta dai compagni di lavoro.

Ma l'età degli eroi, quella dei Des Cartes o dei Leibniz, aprenti col loro genio tutte le porte della Scienza, sembra chiusa per sempre!

Le conquiste del passato pesano sul presente e sull' avvenire. E se è lecito sperare che un più felice impiego delle forze intellettuali, ponga fine

al disordine dell'oggi, non è a credere, nè veramente a desiderare, che si ritorni a quello stato di cose in cui la Scienza era opera esclusiva di pochi uomini superiori. Poichè, mille forze unite riusciranno a sollevare i massi di pietra che pesavano sulle spalle del gigante!

Occorre soltanto perfezionare l'organizzazione del lavoro, il che deve ottenersi, in un regime di libertà, con una conveniente educazione scientifica.

Bisogna che tutti gli uomini illuminati in qualche ramo particolare degli studii, abbiano il sentimento dell'unità degli scopi proposti alla Scienza.

Allora essi si daranno la mano e si aiuteranno l'un l'altro in un'intesa cordiale. Gli sforzi isolati degli individui verranno rimpiazzati dal lavoro più proficuo di società scientifiche [1]. Nè agli spiriti superiori mancherà un posto in tale organamento della produzione. Sciolti anzi dal bisogno di soffocare le loro qualità di ricercatori nell'acquisto di un'erudizione troppo minuta, essi potranno profittare più largamente dei vantaggi della comunità, e di conseguenza rendersi più utili a questa; diverranno organizzatori, leganti svariate ricerche ai fini generali della Scienza, di cui sarà loro possibile acquistare una visione più larga e più precisa.

Ci smarriamo forse in un sogno della fantasia poetica fingendo innanzi agli occhi il quadro di un organamento ideale della produzione scientifica?

Certo non bisogna dissimulare le difficoltà frapponentisi sul nostro cammino; ma queste non possono toglierci la fiducia nel progresso, che si effettuerà senza dubbio lentamente, ma deve condurre, in ogni campo, a forme superiori della vita sociale.

Il fine a cui oggi si deve attendere è un'educazione scientifica, la quale faccia meglio comprendere a colui che lavora in un campo qualsiasi come l'oggetto della propria ricerca venga subordinato a problemi più generali.

Occorre risvegliare negli spiriti il sentimento di una più larga armonia in cui le apparenti contraddizioni si compongono.

Nulla è così pericoloso come il rinchiudersi in un cerchio, donde si bandisca con una logica rigorosa ciò che non si accorda coi resultati di un'esperienza ristretta!

§ 2. **Scienza e Filosofia.**

Gli scopi accennati si riattaccano chiaramente all'azione che la Filosofia deve esercitare sulla Scienza. Poichè infine la Filosofia è espressione di un sentimento che, nell'ordine delle conoscenze, ci spinge, sia pure per vie diverse, verso l'unità e la generalità.

[1] Non mancano i segni che il bisogno dell'associazione scientifica è vieppiù sentito. Citerò una testimonianza autorevole, quella di E. Picard nel suo splendido rapporto sullo stato generale delle scienze pubblicato per l'Esposizione di Parigi del 1900.

Ma se essa non adempie al suo ufficio, in una misura così larga come sarebbe necessario, si deve ricercarne il motivo in quella condizione di cose per cui, in sul principio del secolo scorso, ebbe origine il funesto dissidio che ancora divide i filosofi dagli scienziati. Del quale non è nostro proposito indagare qui le ragioni, poichè non gioverebbe oggi rinnovare le antiche accuse, mentre dall'una parte e dall'altra si scorgono i segni di un riavvicinamento felice.

Osserveremo soltanto che il giudizio dei cultori della Scienza, il quale serenamente dovrebbe correggere il difetto di chiarezza e di precisione accompagnantesi a certe espressioni nebulose del pensiero speculativo, perde ogni efficacia, ove accomuni nella medesima condanna taluno che sotto oscuro linguaggio dissimula soltanto la vacuità degli scopi, con chi, sia pur soggiacendo a qualche inevitabile errore di metodo, mira a cogliere l'unità del molteplice e a sceverare il determinabile nell'indeterminato.

E tanto più diminuisce di valore la critica, quando non paga di colpire il filosofo si volga contro la Filosofia stessa, contrapponendo alla variabilità di questa, la solida costruzione dell'edificio scientifico. Accusa che può essere accolta soltanto da chi non ha compreso come il pensiero filosofico non chieda necessariamente la risoluzione di particolari e ben definiti problemi, ma rappresenti piuttosto una tendenza dell'intelletto umano, la quale dà, per così dire, all'edificio della Scienza lo stile, onde esso diversamente si atteggia ne suo progressivo innalzarsi.

Il severo giudizio degli scienziati, di cui sopra abbiamo discorso, si volge tanto più assoluto contro quella Filosofia che, derivando dalle fresche sorgenti del pensiero moderno, senza freno si è levata a toccare le più alte cime dell'astratto, nella prima metà del secolo passato.

Fortificata dalla recisa condanna di AUGUSTO COMTE, la scienza positiva accoglie la credenza che ivi non sia movimento d'idee, ma vana battaglia di parole. Non ci si limita a combattere la Metafisica dei sistemi moderni con un modo vizioso di considerare certi problemi, ma si giunge fino a negare che vi sieno in qualche modo dei problemi a cui tale speculazione si riferisca.

Così non di rado taluno, pur ignorando ciò che COMTE ha costruito con una esposizione dei risultati generali delle scienze, di cui dopo sessant'anni dobbiamo ammirare la freschezza, accorda il più largo favore a quanto nella sua filosofia vi è di negazione. Di quel che fu oggetto di classiche ricerche, nulla si lascia sfuggire ad una siffatta condanna; senza esame, sembra che tutto quel lavoro sia stato speso inutilmente, poichè mirava a render noto ciò che, in un senso qualsiasi non sarà mai conoscibile.

§ 3. **La rinunzia agnostica.**

Fu osservato giustamente che la disposizione degli spiriti a questo riguardo tiene ad uno stato particolare dell'anima moderna rimpetto a certe questioni tradizionali; perchè una generale pacificazione sembra promessa alla società intera da quell'agnosticismo, critico o dommatico, a cui fanno capo tutte le vie della speculazione nel secolo scorso.

Poco più di trent'anni or sono, un illustre fisiologo (DU BOIS REYMOND) bandiva il concetto di tale agnosticismo, riassumendolo in un eterno *Ignorabimus* che pesa sulla scienza contemporanea.

E più di recente un movimento di pensiero, che costituisce un singolare ricorso nella storia della civiltà, si è destato intorno al grido « bancarotta della Scienza », intenzionalmente scelto a significare il chiaro principio che non possa il sapere dettar norma al volere. Non invano fu agitato il fantasma di una realtà che debba restare eternamente inaccessibile ad una qualsiasi determinazione scientifica!

Ma non rientra nel nostro quadro di esaminare qua, sotto tale aspetto, le conseguenze della rinunzia filosofica che si traduca nell'affermazione dell'inconoscibile.

Basti per noi osservare come una felice reazione si operi, ai dì nostri, contro questa pusillanimità dello spirito moderno, e si affermi ormai chiaramente in varii campi della Scienza.

Veramente coloro che ebbero l'audacia di porre dei limiti alle conoscenze umane, non sempre furono così prudenti da tenersi sul vago terreno delle cose non definite. Dimodochè siffatti limiti vennero per più parti sorpassati, in modo imprevisto, e si rese evidente non essere per nulla più legittimo affermare, intorno ad un soggetto qualsiasi, la nostra futura ignoranza, che credersi in possesso di una conoscenza non ancora raggiunta.

Citeremo un solo esempio istruttivo, ricordando come l'analisi spettroscopica, sia venuta a smentire, dopo pochi anni, l'affermazione di AUGUSTO COMTE vietante all'Astronomia di penetrare il mistero della costituzione chimica dei corpi celesti.

D'altronde le prove più sicure, sulle quali si vollero appoggiare delle conclusioni agnostiche, offrono poca resistenza al progresso della critica; sicchè possono assomigliarsi a certe fortezze, terribili macchine di guerra, che niuna potenza superiore riuscirebbe ad abbattere, se non fosse assai agevole ad un pugno di uomini di sorpassarle, girandovi attorno, senza impegnare alcuna battaglia.

Così appunto procede la Scienza, girando le difficoltà che si oppongono sul suo cammino!

Essa non avrebbe mai raggiunto lo stato attuale, se non fossero venuti mutando di continuo la forma e l'enunciato dei problemi, adattandosi alle condizioni rinnovate del pensiero lo scopo delle ricerche.

Tal maniera di procedere appare così generale, in ogni ramo dello scibile, che uno spirito scettico, riguardante le cose sotto un aspetto particolare, ben potrebbe sorridere di un progresso cui non fu mai dato di seguire la linea retta.

Ma poichè, nondimeno, il riconoscimento del progresso s' impone a chi consideri le cose nel loro insieme, si rende palese come le questioni scientifiche racchiudano qualcosa di essenziale, indipendentemente dal modo particolare secondo cui esse vengono concepite, in un'epoca determinata, dagli studiosi che ad esse rivolgono la loro attenzione.

Ricercare e scoprire tale aspetto essenziale che ogni questione nasconde è ufficio di vero spirito filosofico, non pago di arrestarsi alla superficie delle cose.

§ 4. **I cosidetti problemi irresolubili.**

In un senso largo non vi sono problemi irresolubili, poichè ogni problema risponde ad un sentimento, talvolta oscuro, che può essere soddisfatto dalla scoperta di qualche fatto nuovo, il quale estenda la nostra potenza sul mondo esteriore.

Vi sono soltanto problemi non ancora espressi in un conveniente enunciato; e oziose discussioni, vuote di senso, nelle quali, per difetto di metodo, ci perdiamo talvolta lontano dallo scopo reale, che non sappiamo mettere in luce, cercando una risposta a domande mal formulate.

Così ci ammaestra chiaramente la storia della Scienza, dalla quale appunto vogliamo trarre qualche esempio istruttivo.

§ 5. **La quadratura del circolo.**

Non importa essere versati nella Geometria, nella Meccanica o nella Chimica, per avere udito ricordare alcuni celebri problemi come la quadratura del circolo, il moto perpetuo e la trasformazione dei metalli in oro, per cui tanto si affaticò il medioevo nella ricerca della pietra filosofale.

Siffatti problemi che d'ordinario s'invocano a testimoniare la debolezza dell'intelletto umano, umiliato dinanzi ad insuperabili difficoltà, offrono materia a più interessanti meditazioni, dalle quali viene riaffermata la fiducia nel pensiero scientifico.

Il problema della quadratura del circolo, è il più celebre, fra i tre enigmi che la Geometria greca ha lasciato in eredità agli sforzi dei successori.

La trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo avevano già ricevuto, nei tempi moderni, una conveniente risposta, ma la quadratura del cir-

colo tuttavia resisteva ai primi analisti del secolo passato. Soltanto ventiquattro anni or sono la difficoltà è stata sciolta! Ma il modo come si pervenne a tale resultato, ed il senso stesso della ottenuta risoluzione, hanno il maggiore interesse in ordine al nostro scopo.

« Quadrare il cerchio » significa, per chi non ne avesse esatta nozione, « costruire un quadrato avente la stessa area di un cerchio assegnato ». Che un tale quadrato *esista*, ragioni di continuità facilmente lo dimostrano, poichè il lato del quadrato stesso può venire agevolmente costruito, quando si abbia un segmento uguale alla lunghezza della circonferenza.

Questa osservazione basta ad accertarci che il problema proposto non è assolutamente impossibile. Eppure tutti gli sforzi, rinnovati, quasi senza tregua, per venti secoli, dovevano necessariamente infrangersi contro l'insufficienza dei mezzi che si pretendeva di porre in opera.

Nè alcuna superiorità d'ingegno ci avrebbe dato la chiave dell'enigma, se una nuova critica non avesse chiarito gli antichi concetti relativi alla risoluzione dei problemi geometrici.

La riga e il compasso sono i soli istrumenti che la Geometria euclidea adoperò nelle sue costruzioni. E sebbene non sia fuor di luogo supporre, che ai greci stessi si sia affacciato il dubbio, relativamente alla sufficienza di tali mezzi in ordine ai tre problemi celebri di cui non fu loro dato trionfare, pure mancò ad essi la possibilità di accertarsene colla Analisi.

La cosa fu messa per noi in una nuova luce, da poi che CARTESIO ebbe fondato la Geometria analitica. Apparve allora il vero senso della questione, intorno a cui tanti sforzi si spesero invano:

« Operando sul diametro di un cerchio, mediante la riga e il compasso, si può costruire il lato del quadrato avente la stessa area del cerchio, o (ciò che condurrebbe al medesimo scopo) si può costruire un segmento uguale alla lunghezza della circonferenza? »

Così la parola « costruire » assumeva un senso determinato in ordine a certi istrumenti (riga e compasso) di cui esclusivamente si voleva far uso, onde il problema proposto appariva sotto un aspetto nuovo.

Se la lunghezza della circonferenza deve essere costruibile nel modo accennato, il numero che esprime il rapporto di questa al diametro, deve godere di certe proprietà analitiche ben determinate.

Diventa quindi una questione precisa di sapere se tali proprietà gli appartengano. E sotto questa forma si vede a priori come il problema ammetta una risposta, affermativa o negativa.

La questione fu risolta, nel 1882, per opera del LINDEMANN, il quale felicemente riuscì a estendere ad un campo più largo di numeri i metodi sapientemente immaginati dallo HERMITE nello studio del numero e, base dei logaritmi neperiani.

La risposta è negativa. Non si deve dunque cercare la quadratura del cerchio per mezzo di costruzioni euclidee, poichè la risoluzione del problema è, in questo senso, impossibile.

Ma come già abbiamo avvertito si tratta soltanto di un' impossibilità relativa agli strumenti assegnati.

Poichè esiste la soluzione, non può essere in senso assoluto impossibile raggiungerla. Si tratta dunque di immaginare un istrumento conveniente che sia capace di fornirla, rispondendo a tutte le esigenze della pratica.

Sotto questo nuovo aspetto si può dire che una risoluzione soddisfacente del problema vien data dall'integrafo di ABDANK-ABAKANOWICZ, comunemente usato per la valutazione delle aree.

§ 6. **Il moto perpetuo.**

Una impossibilità più assoluta in confronto alla quadratura del circolo, di cui sopra abbiamo discorso, sembra ostare al desiderato di coloro che da secoli attendono alla ricerca del moto perpetuo. Ma il problema scientifico che a questa ricerca si collega, lungi dal mostrarsi irrisolubile, ha condotto alla scoperta di un sommo principio della natura.

Considerata la questione nel suo aspetto più largo, la domanda del moto perpetuo si palesa come quella di un particolare rapporto fra gli elementi dinamici capaci di generare il movimento di una macchina, ed il rendimento di questa.

Ora un rapporto siffatto resta stabilito dal principio della conservazione dell'energia, per cui appunto il moto perpetuo, come esso è comunemente inteso, riesce impossibile.

Tuttavia fu osservato che, ove indipendentemente dal disequilibrio delle temperature, si pervenisse a trasformare il calore in lavoro meccanico, una nuova forma di moto perpetuo, potrebbe venire raggiunta. Si avrebbe allora una macchina la quale utilizzerebbe, senza arresto necessario, il lavoro fornito da un corpo, costantemente raffreddantesi al di sotto della temperatura dell'ambiente.

Ma alla nuova domanda, suggerita dalla ricerca di un tale moto perpetuo di seconda specie, risponde nel campo dell'esperienza fisica il secondo principio della Termodinamica, negante la possibilità di una siffatta trasformazione. Del quale principio verrà fatto di apprezzare tutta la fecondità positiva, ove si pensi che, insieme col primo principio della conservazione dell'energia, ci dà, col teorema di CARNOT, il modo di valutare il rendimento delle macchine termiche.

§ 7. **L'Alchimia.**

Abbiamo veduto come il problema del moto perpetuo faccia capo ad un elemento quantitativamente invariabile nelle trasformazioni dell'energia.

È invece una irriducibilità qualitativa della materia, in ordine ai nostri mezzi sperimentali, il resultato a cui condussero le ricerche degli alchimisti. Così il problema di « cambiare i metalli in oro », apparve rientrare in un più largo enunciato, dal quale uscì la Chimica moderna.

Le molteplici variazioni della materia, apparenti dapprima sotto la veste del miracolo, avevano colpito la fantasia degli antichi ricercatori, cui nessun mutamento nella costituzione dei corpi doveva sembrare impossibile. Ma quando la critica dei fatti osservati permise di intravedere « la legge » sovrapponentesi alla varietà dei fenomeni, il problema chimico venne ad assumere il suo vero aspetto scientifico, sollevandosi alla generale indagine dei rapporti e delle condizioni che presiedono al mutamento della materia.

Questo si può dire il nuovo enunciato del problema che, nella mente degli alchimisti, rimaneva nascosto; per quanto almeno si guardi all'oscuro sentimento scientifico da cui erano mosse le loro ricerche.

Chè se, d'altra parte, si consideri lo sviluppo della scienza moderna, non si potrà disconoscere come lo scopo stesso delle ricchezze vagheggiate da quegli antichi ricercatori sia oltrepassato. Imperocchè le applicazioni industriali della Chimica recano, ai dì nostri, benefizii più larghi e pregevoli di quella ricchezza di Mida, che la trasformazione dei metalli in oro ci avrebbe dato.

§ 8. **Il problema della conoscenza.**

Niuna avidità di ricchezza ha spinto i filosofi a proseguire con tutte le loro forze il problema che concerne la realtà e la conoscibilità delle cose.

Se fossero riusciti nei loro sforzi, un solo resultato era loro promesso: riconquistare cioè, attraverso il dubbio filosofico, quella sicura ed ingenua fede degli uomini, che è al di fuori e al disopra di ogni critica.

Ma per l'appunto gli spiriti più logici, messisi su questa via, sembrarono pervenire a risultati del tutto opposti: niente garantisce quella pretesa realtà, che con alcun mezzo non ci è dato raggiungere; soltanto l'idea è vera, e l'io resta sicuro dominatore di un mondo, che a lui crolla d'intorno.

Mirabili conclusioni! alle quali invero non riesce difficile dare la risposta che DIOGENE rivolse a ZENONE, allorchè questi pretendeva dimostrare la non esistenza del moto: il cinico, levatosi dalla terra ov'era seduto, si mise a camminare in silenzio.

Così appunto risponde all'idealismo metafisico la filosofia positiva, accennando ai fatti che la Scienza ha raccolto.

All'esaltazione dello spirito, che si crede unico signore di un mondo di sogni, ed in se stesso vuole scoprirne le leggi, essa contraddice mostrando una realtà che si allarga e si allontana da noi, e sfugge alla vana pretesa di assoggettarla ai nostri sentimenti o alla nostra volontà.

Ma veramente le beffe sono, contro i filosofi, armi spuntate. E chi si contenti di ridere merita forse che gli si ricordi il proverbio « risus abundat in ore stultorum ».

Trattandosi di uomini elevati, certo è più saggio cercare di comprenderli, e trarre partito dai loro stessi errori. Poichè una conseguenza assurda non può arrestare il movimento del pensiero; e uno sbaglio, di cui non si volesse scorgere che l'aspetto ridicolo, sarebbe un'occasione perduta d'istruirsi.

Come si potè dubitare appunto di ciò che vi è di più certo per tutti gli uomini, fino dalla più remota infanzia?

Non si riesce forse a comprenderlo se non risalendo coll'immaginazione a quell'età, di cui è quasi perduto il ricordo, nella quale i sogni si confondono colla realtà, e l'immagine riflessa da uno specchio sembra così reale come la persona che gli sta dinanzi.

Perchè la verità e l'errore entrano nel nostro intelletto per la medesima porta, che i sensi aprono al sapere, noi siamo bentosto costretti a metterci in guardia per non rimanere ingannati dalle illusioni.

La volontà dell'uomo di non essere ingannato, tale è appunto l'origine del problema della conoscenza!

Si tratta sempre ed unicamente di questo: apprendere e toccare la realtà di mezzo alle mille cause d'errore per cui la nostra osservazione è viziata.

Occorre dunque stabilire una distinzione relativa.

Perdendo di vista tale relatività per seguire il miraggio di un assoluto fantastico, l'idealismo metafisico ci ha ricondotti al punto stesso donde eravamo partiti, cioè a confondere i sogni coi fatti reali; si dia agli uni il nome degli altri, o viceversa, non vi è tra i due casi alcuna differenza essenziale.

Accade talvolta nelle escursioni alpine che, non sapendo esattamente quanto disti la meta, ci si creda prossimi a toccarla mentre si sale la cima rocciosa di un contrafforte, dal quale una nuova vallata si apre improvvisamente alla vista. Occorre ridiscendere con prudenza; dopo varie ore di una marcia faticosa non ci troveremo forse più alti che al luogo di partenza. Ma il tempo e la fatica non furono spesi inutilmente; poichè se la cima sembra ora più lontana, nell'allargato orizzonte, in realtà ci siamo avvicinati ad essa, superando un ostacolo che la nascondeva ai nostri occhi. Bisogna soltanto non perdersi di coraggio; non rinunziare in un momento di debolezza.

Si ricominci la lotta, con uno sforzo della volontà! E se il pendio è ripido, se enormi crepacci dissimulati dalla neve si aprono sotto i nostri piedi, arrampichiamoci con prudenza, tenendoci stretti gli uni agli altri, leghiamoci alla corda e diamoci la mano!

Così metaforicamente può dirsi dell'idealismo metafisico, che salendo il colle dirupato di un assoluto fantastico, si trovò innanzi ad una valle profonda,

al di là della quale riluce la realtà da raggiungere. Noi siamo veramente più prossimi a questo scopo reale, poichè fummo chiariti intorno alla natura relativa della questione.

Tutti gli uomini di buona volontà, reagendo contro un momento di sconforto, si uniscano dunque per vincere, con rinnovati sforzi, le nuove difficoltà che si affacciano ai nostri occhi!

§ 9. **I pericoli del linguaggio.**

Occorre anzitutto evitare gli errori del passato. Per ciò si deve avvertire che il linguaggio, del quale ci serviamo ad esprimere i nostri pensieri, è, in fin dei conti, un sistema di rappresentazione simbolica delle cose. Poichè esso ci fornisce un processo di schematizzazione, saliente per gradi all'espressione di fatti più generali, ci permette di ragionare intorno ad idee astratte, molto lontane dalla realtà immediata che cade sotto i nostri sensi.

Ma l'uso di questo potente istrumento, che viene in aiuto alla debolezza del nostro intelletto, non è esente da pericoli. Prendendo il volo verso le alte regioni del pensiero, si corre il rischio di dimenticare il significato delle parole, che diventano vuote di senso appena che cessino di rappresentare le cose. Giunti a questo punto, nulla è più facile che operare formalmente sui simboli, mentre lo sviluppo del pensiero tendente alla generalità non trova più alcun freno nel mondo concreto, a cui resta estraneo.

Se dunque non si vuole smarrirsi in un sogno vuoto di senso, non si deve dimenticare la condizione suprema di positività, per cui il giudizio conoscitivo deve affermare o negare, in ultima analisi, dei fatti particolari o generali.

§ 10. **Assoluto e relativo: l'assoluto nel moto.**

Queste osservazioni gettano viva luce sugli argomenti classici, coi quali si pretende provare l'esistenza di qualcosa di assoluto, che debba sfuggire esternamente al nostro sapere.

Si trova nel linguaggio la parola « assoluto » in contrapposto a « relativo ». La parola ha un significato, facile a desumersi dall'uso che se ne fa d'ordinario a proposito di un tema qualsiasi.

Se siamo trasportati in una vettura, vediamo gli alberi sfilare dinanzi ai nostri occhi, e diciamo che essi si muovono relativamente a noi; ed è la vettura, da cui siamo portati, che si muove.

Questo assoluto alla sua volta diviene qualcosa di relativo, se si considera dal punto di vista dell'Astronomia. Gli alberi vengono trasportati dalla terra, che gira intorno al sole.

Ma il sole sembra dotato anch'esso di un movimento proprio di traslazione, rispetto alle stelle lontane, di cui le reciproche variazioni ci appaiono trascurabili per un periodo di tempo non troppo lungo.

Nondimeno osservazioni secolari hanno rilevato come anche queste stelle, impropriamente chiamate « fisse », si muovano le une rispetto alle altre, mutando le loro distanze reciproche in una misura che deve giudicarsi enorme, se riesce sensibile la variazione degli angoli secondo cui esse sono vedute da un punto tanto lontano, come è la nostra terra.

In conclusione, il movimento che viene concepito come assoluto in un certo ordine di atti, appare relativo in un campo più esteso; è un assoluto suscettibile di gradi, rispondente al bisogno di cercare alla nostra scienza un punto d'appoggio più fisso.

Abbiamo voluto soltanto citare un esempio, senza spingere la discussione fino al limite cui si può giungere nello stato attuale delle nostre conoscenze. Avremo occasione di riprendere in esame il problema: qual'è il senso più assoluto che possiamo attribuire al moto? Ma si tratterrà sempre di dare alla parola « assoluto » un significato relativo più esteso, soddisfacente meglio all'insieme dei rapporti meccanici conosciuti.

§ 11. **L'assoluto nella Morale.**

Scegliamo un secondo esempio, in un ordine di considerazioni completamente diverso.

Chi vuole un fine deve volere qualcuno almeno dei mezzi che vi conducono. In questo senso il sentimento del dovere compare fra i motivi determinanti di ogni volontà continuativa, buona o cattiva che sia.

A questo genere di doveri verso se stessi, se ne aggiungono di simili verso la società; i quali, comunque vengano acquisiti per una imposizione suggestiva di altri, non possono comprendersi che come doveri relativi ad uno scopo implicitamente accettato, sia pure per volere di un gruppo sociale, anzichè proprio.

Ora la morale distingue fra tali doveri, contrapponendo i « doveri assoluti » ai « relativi »; ammette che la difficoltà dell'azione possa giustificare il non adempimento di questi, ma all'opposto sancisce che tale motivo non valga a sottrarre alcuno alla pena di compiere quelli. Perchè?

Perchè si tratta di doveri relativi a fini generali, la cui osservanza permanente ha per la società umana un valore superiore ad ogni sacrifizio o danno transitorio per quanto grande.

Ma il valore del fine, che ha significato assoluto per riguardo a certi moventi dell'azione, appare a sua volta relativo nel confronto con altri fini dello stesso ordine: il dovere che esige il suo adempimento, nonostante il sacrifizio o il danno dell'agente, non domanda ugualmente la sottomissione di altri doveri; il fine non giustifica i mezzi. Ed il conflitto morale non può essere risolto che da un apprezzamento comparativo degli ideali supposti e dalla loro subordinazione a qualche ideale più alto.

Ma niun ideale è insuperabile, ed il fine altissimo, che entro un certo gruppo sociale ed in una certa epoca ha senso assoluto, diventa relativo in un confronto più largo delle morali di popoli differenti, in differenti condizioni di vita.

Si obietterà per esempio: Questo ideale assolutamente insuperabile è la giustizia?

Effettivamente in ogni momento e per ogni grado della evoluzione sociale, l'idea umana della giustizia esprime la sintesi più alta dei giudizii apprezzativi; ma questi stessi giudizii non sono ognora suscettibili di essere estesi ad una cerchia più larga di rapporti? E non ne segue perciò che la loro espressione generale ed astratta non possa mai riguardarsi come compiuta?

Il valore assoluto della morale non significa dunque praticamente null'altro che una relatività più larga. Tale constatazione s'impone a chi riguardi scientificamente la Morale come un fatto, indipendentemente da ogni possibile considerazione di un danno o di un vantaggio che possa andarvi connesso. Ma il pericolo del danno temuto non sussiste, per chi tenga dinanzi agli occhi il posto preminente dei fini etici generali sui motivi delle azioni individuali, che è la sola cosa praticamente importante espressa da tale assoluto. Mentre l'affermazione che la Morale è relativa, tende essa stessa ad elevare i criterii dei nostri giudizii e della nostra condotta, sopratutto nei rapporti tra popoli diversi, in differenti condizioni di vita. Nulla è più ingiusto che estendere i canoni della nostra Morale ad uomini dissomiglianti da noi; e l'assurda pretesa d'imporli in nome di una superiorità naturale, darebbe al filosofo facile argomento di riso, se le sue conseguenze pratiche non suggerissero alla mente riflessioni più amare.

§ 12. **Che cos' è l'Assoluto in un senso trascendente.**

Negli esempi che precedono, l'assoluto, conformemente all'uso del linguaggio volgare, ci appare significante una relatività più profonda e lontana da noi.

Vero è che, in tali casi, una vaga coscienza ci avverte la parola non essere adoperata nel suo significato rigoroso. Ma non ci si occupa generalmente di definire un tal senso, nella più larga estensione che gli si suppone in confuso.

Esaminiamo ora ciò che la parola è divenuta pei filosofi.

Poichè nel relativo ci son gradi, si pretende di risalire fino al termine una serie indefinita, per giungere a qualcosa che non sia più relativo sotto alcun aspetto, cui si possa dare propriamente il nome di assoluto.

Risalire fino al termine una serie indefinita di gradi? La proposizione stessa è evidentemente contradditoria. Ma il palese assurdo non cede innanzi ad una illusione radicata nello spirito umano.

È un peculiare vantaggio dei procedimenti simbolici, quello di rappresentarci il termine occupante in una serie assegnata un posto qualsiasi, senza compiere successivamente col pensiero le operazioni che occorrerebbero per raggiungerlo. Così, ad esempio, noi possiamo ragionare intorno al numero 164.792.843 senza contare di seguito tutte le unità che lo compongono: o similmente possiamo istituire dei calcoli aritmetici intorno a 2^{1000}, senza eseguire le mille moltiplicazioni successive indicate dal simbolo.

In questi casi la mente compie, per così dire, in un modo abbreviato, in virtù di rapporti logicamente stabiliti, una serie di operazioni effettuabili, che esigerebbero soltanto un tempo più lungo. E il pensiero si posa sopra un oggetto ben definito nella serie stessa.

Ma l'abitudine che così viene contratta d' surrogare con un simbolo le operazioni costituenti la definizione effettiva, educa l'illusione che la cosa sia definita dal simbolo; e perciò che basti designare con una parola l'ultimo termine di una serie indefinita, perchè a questa parola corrisponda un oggetto. Non pertanto il simbolo è in questo caso vuoto di senso, com' è impossibile l'operazione trascendente che con esso si pretenderebbe indicare. Procedimenti abbreviati consentono al pensiero di compiere più rapidamente un numero finito di operazioni, non mai infinite; una infinità non si esaurisce in un tempo comunque grande, per quanto si proceda abbreviando o aggruppando i suoi termini.

§ 13. **I procedimenti trascendenti rispetto alla Psicologia fisiologica.**

A quest'ultima proposizione si può dare una forma più precisa, dalla quale meglio risulti la illegittimità dei procedimenti trascendenti, di cui sopra abbiamo discorso.

La Psicologia fisiologica permette infatti di misurare il tempo che viene richiesto da un atto del pensiero. E poichè in ogni caso vi è un minimo di durata, in verun modo si può accordare alla mente umana la facoltà di compiere infiniti atti, in un tempo qualsiasi assegnato.

§ 14. **I procedimenti trascendenti nell'analisi infinitesimale.**

Non vi è dunque da sorprendesi che la supposizione opposta messa a base di un modo di definizione vizioso, conduca a innumerevoli assurdi.

L'analisi infinitesimale è il campo ove tali assurdi si manifestarono più chiaramente, innanzi che i processi di ragionamento trascendenti ne venissero felicemente banditi. E la critica dei concetti di infinito e di infinitesimo, di serie e di limite, sembra costituire la più adatta preparazione per ben penetrare il senso delle osservazioni precedenti.

La prima cosa che ci viene insegnata da questa critica è che la parola « infinito » non può applicarsi ad alcun numero o ad alcuna quantità data, ma denota soltanto un modo di accrescimento di una quantità variabile, la quale sia suscettibile di ricevere valori più alti di qualsiasi valore fisso prestabilito. Ciò si esprime appunto dicendo che l'infinito non ha senso attuale secondo l'accezione di LEIBNIZ (1), ma soltanto *potenziale* o *genetico*.

Lo stesso vale per l'infinitesimo.

L' importanza di tale modo di concepire le cose consiste nel riconoscere assurda la pretesa di *definire un numero*, per mezzo di una *serie indefinita*, come *ultimo termine* di questa. Può darsi che *fuori* della serie si trovi veramente un numero che ne costituisca il limite, al quale i termini della serie suddetta vadano *avvicinandosi*; ma l'esistenza di questo limite non esprime in sostanza che una proprietà del *modo di variare* dei termini di una altra serie, costituita dalle differenze tra esso e i termini della serie primitiva. Pertanto l'*esistenza del limite non può argomentarsi dal solo fatto dell'esistenza della serie, ossia il limite non può esser definito esclusivamente per mezzo di questa, ma soltanto paragonando la serie a qualcosa che ne sia dato indipendentemente al di fuori.*

Il valore pratico di queste affermazioni è ben noto oramai a tutti coloro che conoscono l'Analisi infinitesimale, perciocchè gli algoritmi infiniti danno origine generalmente a *serie non dotate di limite*, ed il ragionare come se queste fossero capaci di definire un tal limite conduce a singolarissimi assurdi.

P. es., le serie ottenute con un processo infinito di sommazione possono presentarsi (oltrechè come convergenti verso un limite) come divergenti o indeterminate; appartengono rispettivamente a queste due ultime categorie le serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

e

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Orbene l'uso di queste serie nel calcolo, permette di dimostrare l'uguaglianza di due numeri qualsiansi!

Nè basta; chè, pur nel maneggio delle serie convergenti, occorre non dimenticare che con esse si rappresenta solo convenzionalmente un numero (limite) fuori di esse; dal dimenticarlo si sarebbe tratti invero a far posto a

(1) A vero dire questa affermazione deve essere modificata per riguardo ai sistemi di numeri non archimedei, costruiti recentemente, in varii modi, da Veronese, Levi-Civita, Hilbert, ecc. Ci sia concesso di lasciare da parte codeste costruzioni: e basti avvertire che esse non implicano l'uso di processi di definizione trascendenti.

qualcosa di trascendente, riguardando la serie come *somma di un numero infinito di termini*, e ci si sentirebbe quindi autorizzati ad operare su di esse secondo le proprietà della somma, *permutandone* ad es. l'ordine dei termini; ma in questo modo, p. es. dalla serie convergente

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots,$$

possono farsi nascere ad arbitrio serie convergenti verso limiti diversi, o anche serie divergenti o indeterminate.

« Eliminare ogni processo trascendente di definizione e di ragionamento » : ecco la condizione essenziale per intendere il calcolo infinitesimale, che il CESARO esprime al principio delle sue belle lezioni, avvertendo il lettore di bandire dalla mente ogni idea metafisica !

Agl' insegnamenti che ci vengono porti dall'analisi infinitesimale, aggiungiamo quelli che scaturiscono dalla moderna *teoria degli insiemi*.

Qui il processo di definizione trascendente si è affacciato nella costruzione stessa di certi « insiemi » presi come « totalità degli infiniti enti cui spetta un certo carattere assegnato ».

Fra gli esempi che potremo citare (posti in luce dagli studii di CANTOR, DU BOIS REYMOND, ecc.) ne scegliamo uno semplicissimo su cui il RUSSELL ha richiamato recentemente l'attenzione dei geometri.

In più modi si può costruire un insieme

$$s \equiv [\alpha],$$

composto di enti qualsiansi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, il quale non contenga se stesso fra i suoi elementi (tale dunque che nessuno degli enti α coincida con s).

Ora definiamo Σ come l'insieme di tutti gli insiemi s cui spetta l'indicata proprietà :

$$\Sigma \equiv [s].$$

Si ha anzitutto che Σ non deve trovarsi fra gli elementi s, altrimenti si contraddice alla proprietà supposta per gli s. Ma d'altra parte se Σ si trova fuori dell'insieme $[s]$, questo insieme non esaurisce tutti gli s possibili che godono della proprietà anzidetta.

La contraddizione mostra che il concetto di Σ è illusorio, e così si rende palese la viziosità del processo trascendente con cui Σ è stato definito.

§ 15. **Il valore psicologico dell'Assoluto.**

Ma l'analisi logica che rivela il vizio della definizione trascendente, non esaurisce la questione dell'assoluto. Come si spiegherebbe altrimenti il posto che all'assoluto spetta nelle credenze legate ai più intimi sentimenti dell'animo umano? In qual modo un errore nella posizione di un problema, potrebbe dar valore ad un simbolo che abbiamo riconosciuto privo di senso?

Per rispondere a tali domande dobbiamo riattaccarci alle considerazioni concernenti « l'assoluto nella Morale ».

Già avvertiamo il carattere peculiare della volontà umana di essere in alto grado progressiva, di sottomettere cioè i fini ad essa proposti in una gerarchia, nella quale il fine più prossimo è subordinato al più lontano.

La consistenza di una gerarchia siffatta esige che in ogni momento il fine superiore agisca sulla volontà come un movente abbastanza forte, contro i motivi occasionali che tenderebbero a volgerne o a infirmarne la determinazione. E questa forza auto-suggestiva viene conferita dall'esperimento che la volontà stessa ha fatto della sua fermezza, e si rivela nella conseguente coscienza che essa ha di non mutare.

Si vede quindi come la progressiva estensione della gerarchia dei fini e la sua consistenza, costituiscano due esigenze psicologiche contradditorie per la volontà umana. Un nuovo fine superiore non può venire a modificare i fini già accettati da essa, senza che sminuisca la sua fiducia nella propria coerenza e nella propria forza.

Quando, nella vita dell'individuo o della società, si allarga rapidamente la prospettiva dei fini, sopravviene quindi uno di quei periodi critici che sono caratterizzati dalla disorganizzazione del volere. Questo stato d'impotenza, annullando momentaneamente la personalità umana, ha d'ordinario in se stesso il proprio correttivo, perchè toglie interesse alla ricerca di fini nuovi. Fermato così il progresso, tutti i moventi discordi che si agitano nella mente travagliata vengono ad una suprema battaglia; e come una determinazione si afferma vittoriosa, apparendo capace di subordinare le altre, l'animo vi si appiglia con tutta l'energia di reazione che dà il bisogno di sfuggire ad uno stato doloroso.

Ogni uomo entrando dall'adolescenza nella giovinezza o da questa nella virilità, passa generalmente per un periodo critico come quello innanzi descritto, e ne esce per virtù propria o per il sostegno altrui.

Similmente, in taluni momenti storici, analoghe crisi delle volontà si producono nell'ordine sociale; si hanno allora periodi di disorganizzazione rivoluzionaria, che seguono ad un troppo rapido progresso e riescono a fermarlo, innalzando smisuratamente il concetto di quell'autorità che si affermò prevalente.

Il valore psicologico dell'assoluto è inerente alle condizioni del progresso innanzi descritto. E sarebbe facile di fornire prove storiche.

L'illusione di trascendere la serie indefinita dei fini risponde al bisogno di cercare al di là un termine al dubbio angoscioso, risolvendo con un imperativo autorevole i conflitti del volere.

In questo senso l'assoluto, pittostochè un'idea direttiva, è una condizione liberatrice dello spirito, per cui tutte le facoltà si concentrano e si esaltano in un punto solo, mentre ogni estraneo impulso ed ogni critica resta inibita dalla coscienza: *credo quia absurdum est.*

Siffatto stato dell'animo, essenzialmente emotivo e religioso, costituisce un problema per lo psicologo, ma il filosofo della conoscenza non ha motivo d'interessarsene.

Spiegare come e perchè, coll'affievolirsi della fede religiosa, nell'epoca moderna, l'assoluto sia divenuto oggetto di una ricerca che volle costituirne la scienza, sarebbe certo istruttivo, e non soltanto sotto l'aspetto storico. Ma una tale spiegazione esigerebbe una più lunga disamina.

A noi basta di fare emergere dalle considerazioni precedenti che l'assoluto, preso come oggetto di costruzione razionale, non è più assoluto, e, per la critica stessa, perde il valore di un imperativo sovrapponentesi a tutti i fini della volontà, a tutti i motivi intellettuali e sensibili.

Che cosa rimane dunque di quella pretesa Metafisica, se non un documento dello spirito umano, debole e dominatore ad un tempo?

Icaro librato a volo pei cieli precipita negli abissi del mare.

La ragione scoraggiata profonda nell'inconoscibile.

§ 16. **Sostanza e apparenza.**

Abbiamo veduto come il sofisma enunciato generalmente dicendo che « il relativo suppone l'assoluto », si appoggi ad un'illusione verbale, nascondente un processo di definizione vuoto di senso.

Tutte le antinomie consimili, di cui è piena la Filosofia classica, si spiegano in un modo analogo. Esse possono mettersi sotto la forma di un processo infinito, o presentarsi in aspetto di semplice negazione; ma in quest'ultimo caso si tratta di una negazione puramente formale, che ci serve a costruire medesimamente una parola priva di significato.

Le antinomie di questo genere, essendo vere fino ad un certo punto, quando non si dia ai termini un senso rigoroso, traggono appunto da ciò tutta la loro forza.

Si parla, p. es., della sostanza delle cose, in contrapposto alla loro apparenza. Invece diamante e cristallo di rocca, sotto una simile apparenza nascondono sostanze affatto diverse.

In tali casi si stabilisce una distinzione importante, fra le sensazioni im-

mediate che riferiamo ad una cosa qualsiasi, e l'insieme dei rapporti di questa col mondo che la circonda, dei quali possiamo acquistare in parte una conoscenza mediata.

E l'osservazione risale ad ARISTOTELE; il filosofo nota, ad es., come il remo immerso nell'acqua, pur essendo intero ci appaia spezzato. Ma il senso primitivo della distinzione stessa si è venuto trasformando attraverso il medio-evo, lo spirito dell'assoluto essendosi sovrapposto alla civiltà ellena.

Guardiamo che cosa tale distinzione sia divenuta per KANT!

L'apparenza, o come KANT si esprime, il fenomeno, viene concepita in contrapposto all'essenza, o *noumeno*, prendendo quest'ultimo termine in senso assoluto (1). Si faccia astrazione, nel considerare un corpo qualsiasi, da tutti i rapporti che sono a noi percettibili, in modo immediato o mediato; ciò che resta è la vera essenza del corpo.

Un tale non senso rimarrebbe veramente inesplicabile, se non si riattaccasse ad una rappresentazione antropomorfica del mondo. Ci si immagina che, potendo entrare in una pietra, si proverebbero sensazioni atte a rivelarcene l'effettiva essenza.

Lo stato confuso della mente che risponde al modo assoluto di considerare l'essenza, ricorda appunto quest' antropomorfismo pel quale siamo passati probabilmente nella prima infanzia.

Ma non sarà davvero cagione di meraviglia, che si arrivi a conclusioni agnostiche riguardo a questa pretesa essenza (2), definita per modo che non resti più nulla nel significato della parola.

§ 17. **L' ignoto.**

Veramente non vogliamo negare così il sentimento di un « enorme mistero dell'universo », che le riflessioni intorno all'idea della sostanza, suscitano nello spirito nostro. Poichè concepiamo che rapporti multipli leghino tutte le cose, noi siamo tratti a scorgere dietro di esse un ignoto da svelare, e a rappresentarci l'impossibilità di esaurire gli oggetti che cadono nel suo dominio. Ma l' affermazione dell' inconoscibile, non esprime adeguatamente questo concetto.

D'accordo col nostro ARDIGÒ nella critica che egli muove a questo punto nella dottrina di SPENCER, non possiamo ammettere che ad una realtà accessibile alle nostre conoscenze, si contrapponga una realtà misteriosa, la quale debba necessariamente sfuggire ad ogni sforzo del pensiero. Ben di-

(1) Alludiamo qui al noumeno inteso in senso *negativo*, di cui Kant discorre nel capo III della « Analitica trascendentale ».

(2) L' analisi di Kant fa capo appunto ad una inconoscibilità del noumeno ch' egli esprime affermando l'impossibilità d' intendere un noumeno in senso *positivo*.

versamente le precedenti osservazioni ci mostrano una serie di oggetti, ugualmente accessibili alla ricerca; ma, come questa serie ci appare indefinita, vediamo che il nostro desiderio di sapere non potrà esser mai interamente soddisfatto.

Fortunata condizione invero, per la società umana, a cui un progresso senza fine si apre dinanzi.

§ 18. **Distinzione fra subiettivo e obiettivo secondo Kant.**

Affine alla distinzione fra apparenza e sostanza è quella trà soggetto e oggetto, fra soggettivo e oggettivo.

Possiamo ormai dispensarci dal ripetere come tale distinzione, assolutamente presa, sia priva di senso, rispondendo per una parte ad una veduta trascendente dell'oggetto in sè (che si confonde colla sostanza), per un'altra parte ancora ad una veduta trascendente dell'io, come di un sostrato indipendente dalle varie personalità fenomeniche sovrapposte in una persona.

È sempre il medesimo spirito assoluto della critica, che porge il fondamento all'agnosticismo kantiano.

Ma soltanto chi guardi le cose sotto un punto di vista particolare può interpretare la filosofia di KANT come conducente ad un resultato scettico, nel quale essa s'incontra coi postulati della filosofia positiva.

E mentre questo lato della dottrina sembra rivolto a conciliare certe esigenze pratiche, in quanto « lascia appunto ai dati pratici di riempire il posto per un'estensione della conoscenza ove la ragione speculativa si mostra incapace di occuparlo » (1) si può ben dire che, dall'averne messo in luce il carattere vizioso, non viene infirmato il valore della rivoluzione operata da KANT verso l'antica metafisica. Interpretando largamente lo spirito kantiano, si scorge infatti come la distinzione fra subiettivo e obiettivo non rimane nel pensiero del filosofo una sterile antinomia, ma divenne per lui il punto di partenza di un nuovo concetto della realtà scientifica, che, per altra via, il positivismo ha raggiunto.

Alla stretta veduta del positivismo crediamo anzi che la filosofia di KANT possa ancora aggiungere qualche cosa di scientifico, quando ci si accordi a ritenerne soltanto lo spirito in ciò che ha di migliore, e si muova nuovamente da altre basi ad una costruzione nuova.

L'insegnamento che « nella conoscenza si distingue un elemento personale (subiettivo) ed un elemento reale (obiettivo), e che quest'ultimo variabile da uomo a uomo, si riattacca ad alcune forme generali della sensibilità e della intelligenza umana », resta infatti pieno di significato positivo, ove si proceda

(1) Cfr. « Critique de la raison pure », trad. Barni, 2ª ediz. Préface, pag. 28.

a valutare la distinzione, escludendo ogni pretesa di trovarvi dentro qualche cosa di assoluto.

Ma perciò occorre, non soltanto mettere da parte gli sviluppi della sfrenata speculazione post-kantiana, ma anche gli stessi giudizii del Maestro intorno all'« anticipazione a priori della forma di un'esperienza possibile » (cfr. op. c. pg. 312) e alla « realtà obiettiva conferita alle conoscenze a priori dalla possibilità dell'esperienza » (op. c. pg. 215); giudizi in se stessi ambigui, che, nella loro interpretazione autentica e nell'applicazione loro, risentono del vizio originario d'intendere trascendentemente la distinzione fra subiettivo e obiettivo; e pei quali, venendosi implicitamente a riconoscere una certa oggettivazione delle leggi strutturali della psiche nella costruzione della Geometria o della Meccanica, si è in fin dei conti riaperta la porta a quella Metafisica, che il KANT voleva condannata per sempre.

D'altronde, al di fuori dello sviluppo della Filosofia nel secolo scorso, ciò che era di vitale nel criticismo ha lasciato più vive tracce nei domini della Scienza, ove è penetrato, agitando e rinnovando. E da questa base appunto deve sorgere la critica nuova recante luce ai problemi positivi della conoscenza.

§ 19. **La distinzione tra subiettivo ed obiettivo considerata positivamente.**

La distinzione tra subiettivo e obiettivo, ha un contenuto positivo per riguardo alle nostre conoscenze? In qual modo reggerà essa, poichè abbiam visto cadere l'antinomia fra il soggetto e l'oggetto, trascendentemente presi? Procediamo a valutare alcuni esempii, che sembrano atti a condurci ad una conveniente definizione induttiva.

Si abbia una piccola scatola di cubi, di quelle che (secondo il sistema freobeliano) vengono date come giuoco ai bambini. Il fondo della scatola è diviso da due righe nere in quattro quadrati, uguali alle faccie dei nostri cubi. Il bambino apprende quindi che « per coprire il fondo della scatola occorrono quattro cubi ».

Tutti siamo d'accordo nel riconoscere che questa affermazione contiene un elemento obiettivo: se invero la scatola fosse più grande, in confronto ai cubi, di questi potrebbe occorrerne sei o otto ecc. Tuttavia nell'espressione della conoscenza suddetta entra qualche elemento subiettivo. In primo luogo la forma verbale della parola « quattro », che viene pronunciata diversamente da persone diverse, e a cui un francese surroga il suono « quatre », un tedesco « vier » ecc. In secondo luogo, la forma psicologica di essa [1]: un bambino

[1] Una differenza psicologica è già espressa talvolta dalla stessa diversità verbale: così, p. es., il numero ottanta si rappresenta da un italiano come 10×8, da un francese come 20×4 (quatre vingts)

si rappresenta il « quattro », associando idealmente i cubi alle dita della mano col pollice piegato, un altro alle quattro palline di un pallottoliere; ad un terzo bambino, che non sa contare, si è insegnato a disegnare col lapis, sopra i cubi, degli archi circolari di un quadrante ciascuno; egli riesce quindi a mettere da parte tanti cubi quanti occorrono a coprire il fondo della scatola, disponendoli successivamente l'uno accanto all'altro per modo che i suddetti archi formino (grossolanamente) un cerchio. L'ultimo bambino possiede come gli altri la conoscenza obiettiva in discorso, ma non più attraverso alla rappresentazione del numero, bensì attraverso quella di una figura geometrica.

Diciamo che le conoscenze dei nostri bambini sono obiettivamente le medesime, perchè essi si accordano nella previsione loro domandata, preparando ugualmente i cubi che copriranno il fondo della scatola, mentre questa previsione non si troverebbe verificata per riguardo ad un'altra scatola, o a cubi di differenti dimensioni. Diciamo che codeste conoscenze sono subbiettivamente diverse perchè la previsione è da loro ottenuta in modi diversi, attraverso immagini diverse.

Ma tostochè spingiamo più innanzi la nostra critica scorgiamo:

1) che la previsione anzidetta non è possibile se non attraverso qualche immagine, e però che una conoscenza obiettiva *pura* non è possibile;

2) che il modo subiettivo di rappresentazione influisce sopra la previsione stessa e su altre previsioni analoghe, onde bisogna dire che contiene qualcosa di obiettivo.

Nell' esempio precedente ciò riesce molto chiaro. Il bambino che si rappresenta il fatto citato per la via geometrica, *sa meno* degli altri in quanto non riconoscerà subito che i suoi quattro cubi segnati copriranno il fondo della scatola, ove essi sieno distribuiti in modo da dar luogo, coi quattro archi ad una figura diversa dal circolo (v. fig. 1). Sotto un altro aspetto l'anzidetta rappresentazione geometrica insegna di più, a prevedere che il fondo della scatola può essere coperto disponendo i cubi in un dato modo e in un dato ordine ecc.

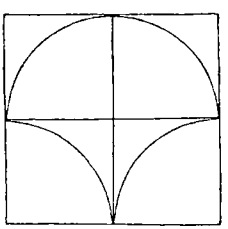


Fig. 1.

Da quest'esempio già si può riconoscere che l'elemento subiettivo e l'obiettivo non sono due termini irriducibili della conoscenza, ma piuttosto due aspetti di questa, resultanti dal confronto di essa con altre conoscenze di una medesima persona o di persone diverse, in rapporto ad una sola cosa o a cose differenti.

Riscontriamo l'elemento obiettivo ove c'è un accordo di previsioni, comunque queste sieno ottenute (da una stessa persona o da più persone) in modi diversi.

Riscontriamo nella pluralità di questi modi possibili l'elemento subiettivo.

Ma comunque, coll'allargarsi della conoscenza, i due elementi suddetti riescano sempre più distinti, distinti assolutamente non lo saranno mai. Imperocchè il concetto dell'obbiettivo e del subiettivo risulteranno in ogni momento, per astrazione, da un confronto di conoscenza, che resteranno sempre suscettibili di estensione.

Per conseguenza nell'aspetto subiettivo delle conoscenze sarà sempre contenuto qualche elemento obiettivo, e così nell'aspetto obiettivo qualche elemento subiettivo.

Tuttavia il processo di distinzione può essere proseguito molto al di là di ciò che appaia dall'esempio sopra citato.

Sempre ponendo a base il confronto delle conoscenze ci si può infatti sollevare al di sopra di quella obiettività, che apparisce quando si confrontano conoscenze di persone diverse in rapporto ad una medesima cosa; e parimenti confrontando i modi di conoscenza relativi a diversi oggetti, si può pervenire a riconoscere la subiettività di rappresentazioni, che pur sono comuni a tutti gli uomini.

È questo un nuovo stadio scientifico della distinzione fra subiettivo e obiettivo, dove si palesa una circostanza nuova, cioè che « il modo di rappresentazione conducente in un dato caso ad una previsione verificata, c'induce in errore per riguardo ad altre previsioni possibili ». Ciò si esprime dicendo che all'aspetto subiettivo della conoscenza si legano delle apparenze delle cose, non rispondenti alla loro realtà. La distinzione così ottenuta c'induce quindi a correggere la conoscenza primitivamente accolta, spezzandola in due parti, di cui l'una (elemento obiettivo) risponde meglio al complesso più largo delle previsioni, l'altra (elemento subiettivo) aggiunta alla prima ci porge la previsione relativa al caso singolo discordante (ossia ci spiega, come si dice, la fallace apparenza).

§ 20. **Subiettivo ed obiettivo nel procedimento della misura.**

Questo appunto noi possiamo riconoscere dall'analisi di un esempio semplice e luminoso.

Quando si parla della grandezza o delle dimensioni di un oggetto, si afferma una conoscenza complessa che involge l'accordo di previsioni molteplici, in rapporto a possibili esperienze tattili, visive, ecc.

Ora supponiamo conosciute le dimensioni di un oggetto posto dinanzi ai nostri occhi. Di queste dimensioni la vista ci fornisce una certa conoscenza immediata nella quale si mescolano per altro varii elementi che dobbiamo sottoporre alla nostra analisi.

Anzitutto si deve tener conto della distanza e della posizione dell'oggetto, e correggere le cause d'errore che tengono a questo elemento di rapporto fra il soggetto e la cosa, mutando in più modi le condizioni della visione di essa.

Ma dopo ciò rimangono ancora, nella nostra conoscenza, alcuni elementi dipendenti dalla struttura dell'organo visivo, che la Psicologia fisiologica c'insegna essere variabili da uomo a uomo, ma tenere tuttavia a certe circostanze generali della sensazione. Così, ad es., due punti dell'oggetto, i quali si trovino separati dal vuoto, appaiono più vicini di altri due punti equidistanti che sieno riuniti da un tratto di materia continuo; e similmente lunghezze uguali vengono apprezzate diversamente a seconda della loro colorazione uniforme o varia, ecc.

Noi vediamo già nell'esempio citato l'influenza dell'elemento subiettivo inerente alla vista, che le sensazioni tattili ci permettono di correggere. Ma anche senza ricorrere ai procedimenti più esatti di misura, per mezzo del tatto, è agevole comprendere come esperienze appropriate possano condurre a riconoscere direttamente le cause d'errore sistematiche, senza uscire dal dominio dell'osservazione visiva; basta invero notare la colorazione delle differenti parti dell'oggetto, sostituire il vuoto a talune parti piene, ecc. Ed una volta stabilite così certe regole che possono riattaccarsi alla prospettiva aerea, presa in senso largo, si ha in queste il mezzo di correggere le sensazioni della vista, e di giungere quindi ad una più adeguata conoscenza delle dimensioni sottoposte al nostro giudizio, per modo da ottenere previsioni più concordi relativamente alle diverse esperienze visive possibili, di una stessa persona o di persone diverse.

Se ora lasciamo cadere ogni restrizione nell'uso di un senso piuttosto che di un altro, senza uscire dal campo della misura, troviamo materia a più interessanti riflessioni.

La determinazione di una misura, costituente un giudizio comparativo fra una lunghezza ignota ed un'altra presa come unità di riferimento, si effettua per mezzo dei sensi, aiutati dall'uso di opportuni istrumenti. L'istrumento che viene adoperato comporta un certo grado di precisione, che si può riguardare come un dato obiettivo del giudizio. Ma oltre a ciò si debbono prendere in considerazione la *maniera* con cui l' istrumento suddetto viene adoperato, le condizioni fisiche e psicologiche dell'esperimentatore, e mille altre cause accessorie, per cui i risultati delle esperienze, ove si domandi un certo grado di esattezza, differiscono da una volta all'altra per una stessa persona, e nel loro insieme per persone diverse.

Ora, prescindendo dagli errori sistematici, per occuparci soltanto degli accidentali, si riscontra il fatto singolare ed istruttivo che la media dei resultati

per un medesimo sperimentatore tende a differire dalla misura reale per un errore regolare, che prende il nome di costante personale.

In due modi questo fatto può essere riconosciuto, sia coll'impiego di istrumenti di misura più perfezionati, sia col confronto delle osservazioni di differenti persone. Ma una volta stabilita la costante personale, valendoci di essa per correggere sistematicamente la determinazione di misura, si raggiunge un grado di esattezza maggiore, che si manifesta per un accordo più preciso fra i resultati di uno stesso sperimentatore e di sperimentatori diversi.

Le notizie, sopra ricordate, rischiarano il contenuto positivo dell'affermazione relativa all'elemento subiettivo della conoscenza.

Infatti nell'esempio precedente noi vediamo ancora una volta come non si tratti di dare all'oggetto per riguardo al soggetto un significato trascendentale rigoroso. La distinzione per essere relativa non perde certo della sua importanza: l'esistenza di un dato della struttura sensoriale riesce lucidamente definita comunque la conoscenza medesima, che prendiamo come esatta, si riconduca mediatamente ai sensi stessi, di cui poniamo in luce l'errore.

•

Ma vi è un altro aspetto delle considerazioni precedenti che importa di rilevare.

Il riconoscimento della *legge degli errori* sopra accennata si ha sostituendo all'insieme delle osservazioni varie e molteplici la loro media aritmetica, che si presume avvicinare di più alla misura esatta.

Due questioni sorgono.

Anzitutto vediamo l'idea di una misura esatta avere una parte nel procedimento mentale che ci conduce a correggere l'errore dei sensi. È questo un punto essenziale, su cui sopratutto i kantiani fermeranno la loro attenzione.

Che cos'è la misura esatta? Non è essa l'assoluto nella misura? E non si sarebbe così forzati di accordare un posto a questo assoluto, che dianzi abbiamo proclamato vuoto di senso?

Esaminiamo pacatamente la questione.

Se viene domandato: « Si può concepire un ultimo termine nella determinazione sempre più approssimativa di una misura? noi rispondiamo no. In questo senso realistico, la misura esatta non significa nulla. L'ipotesi di una determinazione rigorosa immediata della misura urta poi contro obiezioni di varia natura. Ciò che sappiamo o supponiamo della costituzione della materia, e ciò che ammettiamo relativamente alla luce (sopratutto la nozione di una lunghezza d'onda), creano ostacolo ad una siffatta ipotesi; sicchè non è difficile, p. es., assegnare un limite teorico, non troppo lontano dal limite pratico effettivamente raggiunto, alla più piccola lunghezza visibile col microscopio.

Ma tutto ciò è anche indifferente per noi quando prendiamo l'ipotesi di una misura esatta come punto di partenza di un ragionamento.

Il valore dell'ipotesi sta soltanto nell'ammettere che i fatti inerenti alle determinazioni sperimentali della misura possano essere rappresentati da un concetto (il concetto di un numero) logicamente ben definito, per modo che i ragionamenti istituiti su tale concetto conducano a previsioni verificate dalla esperienza. Ora in questa subordinazione dei dati delle sensazioni e dei concetti, sta appunto un elemento della struttura psicologica, la cui importanza per la teoria della conoscenza avremo occasione di rilevare più tardi.

Poche parole ancora intorno al *postulato della media*, che meno direttamente si lega al nostro soggetto.

Diceva argutamente il LIPMANN al POINCARÉ, che in tali questioni, attinenti alla probabilità, l'accordo degli scienziati è unanime, perchè i matematici le ritengono risolute dall'esperienza fisica, e i fisici dalle matematiche. E il POINCARÉ, riportando il motto, giustamente avverte, la questione non doversi oramai più discutere; si tratta soltanto di resultati sperimentali.

La scelta della media aritmetica a rappresentare una serie di osservazioni, corrisponde alla scelta di quel numero per cui la somma dei quadrati delle differenze dai resultati delle osservazioni parziali, riesce minima. Questa scelta è a priori arbitraria. Ma il principio da cui essa dipende si giustifica col maggiore accordo ottenuto nel confronto di serie d'osservazioni diverse. In fin dei conti la nozione fisica della misura risponde ad un intervallo, che si tenta di ridurre il più piccolo possibile, entro il quale sono racchiusi i numeri forniti dal processo determinativo. Questo intervallo si restringe se ai numeri dati dalle singole osservazioni si sostituiscono le medie delle osservazioni similari. Tale è il valore del postulato della media che GAUSS ha posto a base della teoria degli errori. Si prende la media aritmetica, rendendo minima la somma dei quadrati delle differenze dianzi indicate, perchè si domanda appunto, nel resultato, di ridurre l'intervallo che separa, in un senso e nell'altro, i numeri estremi ottenuti, dal numero equidistante da essi.

§ 21. **Subiettivo ed obiettivo nella costruzione scientifica.**

Proseguendo le osservazioni precedenti saremo tratti a discutere più profondamente il problema che concerne la definizione positiva del reale; questo problema considereremo in modo più largo nel cap. II, istituendo una critica dei fatti e delle teorie.

Qui ci limitiamo ad osservare come l'esempio della misura c'istruisca intorno al valore scientifico della distinzione tra subiettivo ed obiettivo nella conoscenza. Dappoichè questa distinzione, smessa ogni pretesa d'intenderla

trascendentalmente, diviene il punto di partenza di un metodo di correzione progressiva nello estendersi della Scienza. Se tale veduta non può appagare coloro che, in un campo qualsiasi, amano raffigurarsi un procedimento come compiuto, essa risponde invece alle esigenze del progresso, ed ha quindi un significato ben più positivo e soddisfacente per gli scopi pratici.

Non vi è dubbio che la Scienza miri ad una conoscenza sempre più obiettiva. In ogni momento della sua elaborazione, essa lascia quindi fuori dalle sue esposizioni dommatiche gli elementi che, nella conoscenza acquisita, appaiono subiettivi. Ma l'eliminazione del subiettivo dovrà essere spinta ancora innanzi in uno studio più avanzato, nel quale la correzione dell'errore che vi attiene, sia proceduta più oltre. E d'altra parte quegli elementi subiettivi, scartati come residui dell'eliminazione precedente, daranno ancora qualcosa di obiettivo, vagliati con una nuova critica.

Così il processo costruttivo della Scienza può paragonarsi al moto di un'altalena, che colui che vi è sopra tenti di spingere avanti il più alto possibile; ad ogni spinta in avanti corrisponde una oscillazione per cui diviene più pronunziato anche il movimento all'indietro, e ciò rende sempre più efficace la spinta.

La Scienza riguardata nel suo aspetto genetico non sale soltanto ad una obiettività sempre maggiore, ma per contrasto spinge a vette più eccelse la subiettività delle rappresentazioni, che sono il suo modo di conquista.

§ 22. **Critica del positivismo.**

Lo schema costruttivo accennato viene ad integrare la veduta della Scienza come formata, che appartiene alla Filosofia positiva.

Il movimento di pensiero, designato da questo nome, deve la sua origine ad una reazione contro le arbitrarie concezioni dell'idealismo metafisico, tanto più pericolose in quanto pretendevano di assurgere ad una somma (anzi assoluta) obiettività, laddove rispecchiavano soltanto l'esagerazione del subiettivo.

Mentre EMANUELE KANT denunziava colla sua critica la fallacia di codesta pretesa obiettività metafisica (pur aprendo l'adito ad una certa, non giustificata, estensione del subiettivo sull'obiettivo), AUGUSTO COMTE attendeva ad una critica negativa di essa, contrapponendo ai sistemi filosofici multiformi e discordi la Scienza formata, e ponendo in luce il carattere delle conoscenze di « fatto », cui essa si riferisce.

ICILIO VANNI rileva acutamente che questo carattere della conoscenza reale, viene ritrovato dal COMTE nell'accordo degli uomini, cioè nel valore sociale della Scienza, contrapposto al valore individuale della Metafisica. Noi mettevamo in luce poc'anzi, accanto a questo importante elemento di distinzione dell'obiettivo, altri elementi che restano nella sfera individuale.

Comunque, lo spirito positivo che informa tutta l'opera del COMTE, e da cui essa riceve il nome, si manifesta in una cernita rigorosa delle conoscenze cui viene attribuito il carattere di obiettività. Questo spirito, indipendentemente dalla scuola dei letterati e dei sociologi, che si sono dati a sviluppare soprattutto alcuni resultati delle ultime costruzioni comtiane, ha esercitato una potente azione nei varii rami della Scienza, ed ha toccato la sua più alta espressione nel campo delle conoscenze fisico matematiche, onde il Maestro trasse i suo caratteri speculativi.

Frattanto l'azione suddetta, in ogni ordine dello scibile, si palesa in un duplice modo: con uno sforzo per raggiungere una forma di conoscenza, sempre più indipendente dalle varie rappresentazioni possibili; con un disinteresse completo per tutto ciò che concerne codeste rappresentazioni, e con una condanna sommaria di quella Metafisica che da esse trae alimento.

Già dicemmo come questo lato negativo del positivismo, che pure sembra raccogliere il maggior favore, sia ai nostri occhi il più debole. La critica della Metafisica che ne esce fuori, per una parte concede a questa *di più* di quanto le si deve, per l'altra involge in una condanna dommatica qualcosa che pure in essa merita di essere rivendicato.

§ 23. **Positivismo e Metafisica.**

Vi è qualcosa da rivendicare nella vecchia Metafisica? E questo stesso dubbio non basta perchè da tutti gli uomini di scienza si decreti l'ostracismo verso chi lo propone?

Noi domandiamo che, innanzi di pronunziare la condanna, si ascolti l'*imputato* senza la presunzione di avere davanti un *reo*.

Anzitutto occorre sapere « che cosa s'intenda comunemente per Metafisica ». Pochi forse o nessuno, fra i positivisti, si sono posti una tale domanda. O almeno essi si sono spesso fermati alla risposta « *Metafisica è scienza dell'assoluto*, posto al di là della relatività fisica [1]; questo *assoluto è inconoscibile*, e vana quindi la pretesa scienza che vi si riferisce ».

Per noi invece l'*assoluto è un simbolo privo di senso*, definito con un procedimento vizioso, e quindi sotto questo aspetto, si concede *troppo* alla Metafisica, accordandole l'*esistenza* di un *oggetto*, sia pure non raggiungibile, cui essa si riferisca.

Tuttavia la definizione sopra riportata della Metafisica è incompleta: la Metafisica non combina soltanto dei simboli privi di senso, che si pretenderebbero significare qualcosa di trascendente, ma si affatica a rappresentare il suo oggetto mediante *immagini*, che hanno un significato concreto.

[1] A tale onore in fatti è stato assunto il vocabolo con cui si intese primamente indicare il libro della collezione aristotelica che vien dopo quello della Fisica!

Per poco infatti che ci si accosti ad esaminare uno di quei *sistemi ontologici*, ove si ha l'espressione più genuina dello spirito metafisico, si scorge tosto come le *entità*, con cui in essi si fabbrica il mondo, altro non rappresentano se non *immagini di cose reali*. Quando anche i loro autori vi pongono in guardia che le *sostanze*, gli *eteri* o i *fluidi* da essi immaginati sono ben diversi dagli oggetti concreti cui le parole sono associate, in quanto rappresentano qualcosa che è al di là dei fenomeni, voi non tardate a riconoscere come questa diversità consista soltanto nell'aver unito proprietà spettanti a cose diverse, con un processo mentale di associazione e di astrazione.

In ultima analisi una *ontologia* è una *rappresentazione subiettiva della realtà*, un *modello* foggiato dallo spirito umano, i cui *elementi, tratti da oggetti reali, vengono combinati per modo da render conto di un certo ordine di conoscenze, secondo un certo punto di vista, che si prende arbitrariamente come universale*.

I primi sistemi ontologici che la storia registri palesano grossolanamente questo carattere; così, p. es., il sistema di TALETE DI MILETO che spiegava l'umidità del seme e della pianta, l'origine dei terremoti e la costituzione dell'ambiente geografico della Grecia, riguardando « l'acqua » come il sommo principio di tutte le cose. Nelle costruzioni più evolute il processo di associazione e di astrazione è più complesso.

Ma nella Filosofia moderna vi si aggiunge il modo trascendente di considerare l'*universalità* del sistema, che si pretende non soltanto adatto a spiegare ogni nuovo dato possibile della realtà, ma anche la *realtà* stessa presa *nella sua infinità attuale*, e quindi l'assoluto contrapposto al relativo.

L'origine teologica della Metafisica dell'età nostra, spiega abbastanza bene il carattere anzidetto, da essa assunto. Tuttavia sotto un certo aspetto appare come codesta degenerazione, per cui si introduce nelle ontologie una viziosità sistematica, sia il naturale sviluppo, secondo le leggi psicologiche, del principio stesso di quel modo di filosofare, che, dopo alcune osservazioni preliminari, si isola completamente dal mondo esteriore. Invero tale isolamento permette al pensatore di raffigurarsi come perfetta la propria concezione del reale, di guisa che la infinità dell'universo, che è un carattere del processo *genetico* di acquisto delle conoscenze, non può essere rappresentata nella concezione anzidetta se non accordando all'*infinito* un valore *attuale*.

Ma, senza indugiarci ulteriormente nella critica di quei procedimenti trascendenti, di cui abbiamo denunziato la vanità, riconosciamo piuttosto che anche nelle ontologie della moderna Metafisica, ci è sempre un *sistema di immagini*, un *modello*, che può adattarsi, talvolta convenientemente, ad un qualche ordine di fatti reali, e che, ad ogni modo, promovendo associazioni nuove, può riuscir utile nello sviluppo della Scienza. Ed unicamente a questo

elemento si deve se, pure nei più strani sistemi metafisici, s'incontra qualcosa che sembra preludere a qualche scoperta o veduta scientifica, effettivamente conseguita di poi.

D'altronde accanto alla costruzione delle ontologie metafisiche, non nascondenti la loro pretesa di porgere una scienza *definitiva* e *completa* (e non curanti di ricercare se tali aggettivi dopo quel nome abbiano un senso) altri *sistemi ontologici* sono stato costruiti, e si costruiscono tutti i giorni, circoscritti nel campo di un ordine di cognizioni. Nè manca la tendenza dello spirito umano ad isolarsi nella loro contemplazione, e ad estenderne la validità al di là del loro campo primitivo! (1)

Queste costruzioni più modeste, e più utili, che si trovano spesso confuse alla Scienza, non sono sfuggite alla critica implacabile di COMTE, che le ha denunziate come metafisiche. L'etere o i fluidi, di cui i fisici popolano ipoteticamente il mondo invisibile, non hanno trovato grazia presso di lui; e lo stesso si dica di tante altre concezioni analoghe, anche oggi accolte da numerosi scienziati. Che la condanna di Comte sia giustificata in quanto a siffatte costruzioni e teorie si vuol dare il senso di *conoscenze obiettive*, chiunque abbia spirito positivo sarà disposto ad accordare; ma che codeste teorie (diciamo pur *metafisiche*) non abbiano proprio alcun valore, come *rappresentazioni psicologiche*, nel processo genetico della Scienza, è una tesi che non può essere accolta senza uno studio critico più approfondito di codesto processo .

Ma è orami tempo di spingere la critica del positivismo entro campi scientifici determinati.

§ 24. **Positivismo fisico.**

In nessun altro ramo dello scibile, lo spirito positivo ha avuto una così alta esplicazione come in talune vedute recentemente affacciatesi nelle scienze fisiche. Ciò apparirà ben naturale del resto a chi consideri che alla Fisica appunto si deve la prima concezione realistica del fatto, e dalla Fisica il metodo sperimentale ha preso origine.

(1) Un esempio caratteristico è la *dottrina dell'evoluzione*, divenuta nella costruzione di H. SPENCER un vero *sistema metafisico*, sebbene non viziato dal trascendentalismo, cui l'autore ha lasciato un posto soltanto *fuori* della parte positiva della sua filosofia.

Per estendere e giustificare l'evoluzione oltre il campo biologico (ove essa costituisce una teoria scientifica) l'illustre filosofo è stato tratto a porre nei « Primi principii » delle proposizioni generali, come « l'instabilità dell'omogeneo », il distinguersi di questo sotto la « forza incidente » ed altre consimili: proposizioni alle quali nessun cultore della Meccanica vorrà accedere, senza beneficio di inventario; ma cui ciascuno potrà riconoscere il valore di *immagini*, sotto certi rapporti, assai felici.

Il più puro, il più alto positivismo si riscontra p. es. nelle opere del MACH e del KIRCHHOFF. Questi si è spinto così innanzi, che pervenne a bandire dalla Meccanica il concetto di *forza,* come quello che gli sembrava rispondere ad un elemento subiettivo nella rappresentazione del moto, segnatamente nei riguardi dell'Astronomia. Le toerie fisiche, in quanto conducono per ciascun ordine di fenomeni ad un' equazione differenziale, nella quale soltanto si riguardano contenuti i fatti, vengono sistematicamente spogliate da tutto ciò che in esse ha valore d'intuizione.

Da un siffatto modo di considerare le cose, deriva una conseguenza inaspettata, messa in luce da un'osservazione geniale del POINCARÈ. Se per un certo ordine di fenomeni è possibile una *spiegazione meccanica,* sono anche possibili infinite altre spiegazioni dello stesso genere.

Si ha, p. es., una spiegazione meccanica della luce, secondo la quale essa viene attribuita ad un certo modo di vibrazione di un *etere*; per ciò solo è possibile d'immaginare, in infiniti modi diversi, una diversa serie di vibrazioni che si accordi ugualmente con tutti i fenomeni luminosi.

La cosa ha tutta l'apparenza di un paradosso: teorie meccaniche, tra loro differenti, possono esser *vere* al tempo stesso, cioè rispondere ugualmente alla realtà, in quanto esse racchiudono i medesimi fatti e differiscono in ciò che la loro rappresentazione ha di subiettivo.

Quale progresso sotto l'aspetto logico! Risolute in un modo inaspettato tante oziose discussioni volte a scegliere fra teorie *equivalenti,* si giunge fino a lasciare da parte ogni rappresentazione particolare dei fatti, per domandarci, in ogni singolo caso, se essi si acconcino ad una spiegazione meccanica. Così lo spirito fisico si emancipa da certi procedimenti tradizionali; sembra difficile di portare più innanzi in questa scienza il pensiero positivo.

Ma l'emancipazione non è completa, poichè resta una necessità dell'intelletto umano di formarsi dei modelli meccanici concreti, e si avrebbe torto di riguardare come perfettamente equivalenti due teorie, che hanno un valore subiettivo diverso.

In questo aspetto psicologico di esse sta anzi la forza che le spinge in avanti sul cammino delle scoperte; onde, per ogni campo, un piccolo numero di teorie rispondenti al bisogno di semplicità, che è connaturato al nostro intendimento, furono concepite e seriamente discusse.

Lo spirito inglese di un MAXWELL o di un THOMSON non teme di seguire nei più minuti particolari teorie di codesto genere; e la rappresentazione concreta del movimento dell'etere, suggerisce loro la scoperta di fatti, che destano l'ammirazione di tutto il mondo scientifico.

Non usciremo dal dominio delle conoscenze fisiche prendendo brevemente in esame le questioni relative all'*ipotesi atomica*, nelle quali il valore psicologico della rappresentazione metafisica si palesa molto chiaramente.

Non è nostro proposito di discutere qui le antinomie che si collegano alla supposizione dell'atomo. Poichè non sappiamo rappresentarci una parte della materia, se non dotata di tutti gli attributi di questa, l'immagine che ci formiamo degli atomi, riguardandoli come corpi estremamente piccoli, urta contro difficoltà, forse insormontabili, appena che si attribuisca loro un senso reale.

Veramente non possiamo tacere che i nuovi studii originati dall' esperienza del tubo di CROOKES, e le idee relative alla spiegazione elettrica dell'indivisibilità dell'atomo, allontanerebbero forse la più grave delle difficoltà a cui sopra abbiamo alluso. Nondimeno tali difficoltà rinascerebbero per l'*elettrone*, sicchè uno spirito prudentemente positivo non può vedere nell'ipotesi atomica che una rappresentazione subiettiva.

Spogliando l'atomo degli attributi concreti, inerenti alla sua immagine, si viene a considerarlo come un simbolo. Il valore logico della teoria atomica dipende allora dalla corrispondenza che si conviene di stabilire fra i simboli che essa racchiude e la realtà che si vuole rappresentare.

Ora se ci riportiamo al momento in cui la suddetta teoria fu accettata nella Chimica moderna, vediamo che le formule atomiche brute contengono soltanto la rappresentazione dei rapporti invariabili di combinazione dei corpi semplici, in peso e in volume; questi ultimi essendo presi in relazione ad uno stato gassoso ben definito.

Ma, una volta introdotto nella scienza, il linguaggio atomico suggerisce di estendere il significato dei simboli, e di cercare nella realtà fatti che rispondano a questa concezione più estesa.

La teoria cammina, spinta, per così dire, dal suo lato metafisico, o, se si vuole, dall'associazione d'idee che l' immagine concreta dell'atomo porta con sè.

Così alle formule brute si sostituiscono, nella Chimica dei composti del carbonio, le *formule di struttura*, le quali vengono a rappresentare, mercè la disposizione o l'aggruppamento degli atomi nella molecola, dei rapporti di formazione di secondo grado, cioè rapporti inerenti a certe trasformazioni chimiche rispetto a cui taluni gruppi di elementi hanno in qualche modo carattere invariante. E qui, non bastando l'immagine piana della molecola, a spiegare p. es. i fatti d'isomeria, soccorre la rappresentazione stereochimica di VAN'T HOFF.

Dobbiamo ricordare ancora la teoria cinetica dei gas, i fatti spiegati colla dissociazione molecolare in ioni, le ipotesi suggerite p. es. a VAN DER VAALS della veduta che all'atomo appartenga una grossezza effettiva? dobbiamo accennare ai fenomeni fisici di un ordine tutto diverso (p. es. alla colorazione

delle pellicole sottili formanti le bolle di sapone) che W. THOMSON ha riattaccato alla misura di codesta grossezza? [1].

Un tale insieme di resultati mette chiaramente in luce, come non sia utile al progresso della Scienza fermare il cammino di una teoria, guardando soltanto al suo aspetto positivo, cioè all' insieme dei fatti che essa spiega; il suo valore risiede ben più nelle ipotesi che essa è capace di suggerire, per mezzo della rappresentazione psicologica dei simboli.

Non ne trarremo la conclusione che l'ipotesi atomica debba corrispondere alle sensazioni estremamente sottili di un essere simile ad un uomo perfezionato; non ragioneremo neppure intorno alla possibilità di codeste immaginarie sensazioni, in quanto si pensino come una pura estensione delle nostre. Ma ripeteremo della teoria atomica ciò che si dice un maestro illustre aver pronunziato relativamente alla unità della materia: se ad un primo esame sembri possibile un fatto che contraddica la rappresentazione atomica, vi sono forti probabilità perchè questo venga smentito dalla esperienza.

Una tale capacità di adattarsi ai fatti, fornendone il modello, non significa forse la realtà *positiva* di una teoria?

§ 25. **Positivismo biologico.**

Se più alpinisti si trovino saliti sulla vetta di un colle per vie diverse e tortuose, di mezzo ad un'intricata boscaglia, essi possono bene dimenticare i dubbii intorno alla scelta di una strada, che li hanno divisi alla partenza, per celebrare insieme la conquista della mèta desiderata in comune. Assorti nella vista grandiosa, che ricompensa tutte le fatiche, i nostri uomini abbandoneranno ogni discussione fino al momento in cui il desiderio di salire più in alto, non imponga loro una nuova scelta del cammino da tenere.

Così appunto i fisici, allorchè sono pervenuti a raccogliere molteplici ordini di fatti in un fatto generale espresso da un'equazione differenziale, possono ugualmente lasciare da parte ogni questione attinente alle rappresentazioni subiettive che li hanno condotti al resultato. Soltanto un progresso ulteriore domanderà un'analisi su questo soggetto.

Ma nelle scienze biologiche poche sono le vedute semplici e generali già conseguite; la enorme complicazione dei fatti ne rende difficile l'acquisto; le rappresentazioni psicologiche, desunte da scarse osservazioni ed associazioni preliminari, si presentano troppo spesso inadeguate allo scopo; e al sentimento dell'impotenza si unisce facilmente l'idea di qualcosa di vago, di

[1] Qui sono ancora da citare gli sviluppi recentissimi di J. J. THOMSON sui fenomeni di condensazione, e di J. PERRIN in rapporto al movimento browniano (*Aggiunta alla 2ª edizione*)

indeterminato, di mistico, quasi un segreto timore che opprimendo il viandante nella strada oscura e selvaggia, ne sminuisca le già deboli forze.

Questo quadro si adatta assai bene allo stato degli studii biologici, allorchè essi, sotto l'influenza della Filosofia generale, furono pervasi, come da un nuovo soffio più forte, dallo spirito positivo.

Pertanto la prima esplicazione del positivismo in questo dominio della Scienza, consiste nel rimuovere le illusorie spiegazioni mistiche, e nello spingere innanzi lo studio particolareggiato dei fatti: le pazienti indagini anatomiche, già penetrate con CUVIER nell'intimo degli organismi animali mediante la dissezione, si allargano nelle ricerche di embriogenia marina, e riescono più tardi alla fondazione della Citologia, grazie alle scoperte della *tecnica istologica*.

Di pari passo alle conquiste anatomiche marciano i progressi della Chimica biologica e della Fisiologia; la prima riuscendo ad eliminare la veduta di una diversa costituzione della materia organica, in confronto alla inorganica; la seconda riducendo e spiegando molteplici processi fisiologici come fenomeni fisico-chimici. Questi fatti particolari bene accertati, appariscono costituire la parte più positiva dei successi conseguiti dagli studii biologici ai nostri giorni.

Ma essi rispondono ad un indirizzo di ricerca parziale, analitico, che tende ad una spiegazione fisico-chimica dei fenomeni vitali. Già COMTE, accennando alle somiglianze fra la Biologia e la Fisica ne ha rilevate le differenze, protestando contro il tentativo di ridurre l'una all'altra; e la natura della conoscenza fisiologica sintetica, in contrapposto alla fisica, è stata lucidamente chiarita da CLAUDE BERNARD: è un nuovo ordine di rapporti, un diverso aggruppamento dei fenomeni elementari, presi in un determinismo *gerarchico*, che costituisce la *sintesi fisiologica*.

Ora questa sintesi è espressa in un certo grado, da talune rappresentazioni generali, che si affacciano appunto in tale dominio, come idee direttrici della ricerca.

Se l'ipotesi dell'*evoluzione* ha assunto questo ufficio direttore, per riguardo agli studi anatomici e fisiologici, si deve appunto alle costruzioni teoriche che essa ha promosso a spiegare i fatti della *eredità* e della *variazione*, e alle vedute sui problemi della Citologia generale che vi si connettono.

Affacciamoci a questo campo, e vediamo tosto come il confronto delle osservazioni e delle esperienze, in una parola lo studio positivo dei fatti nel loro contenuto obiettivo, non sembri più sufficiente. Di nuovo sulle ruine delle antiche teorie screditate dell'*animismo*, della *forza vitale* e del *nisus formativus*, si ricostruiscono nuove rappresentazioni, che pur attingono a qualche

corrente di pensiero che per insufficienza di cognizioni non potè svolgersi convenientemente nel passato [1].

Mentre da ogni parte si è tratti allo studio della cellula, cui mettono capo i problemi della generazione e dello sviluppo istologico, si comprende che la ricerca positiva si volga ai più intimi caratteri anatomici del plasma, in ispecie degli elementi germinali, e tenti di associare queste distinzioni reali ai caratteri differenziali degli organismi che ne risultano.

Ma questa via non sembra condurre direttamente allo scopo; ed un esempio vale a chiarire la cosa.

Fra i più netti caratteri di diversità nella struttura delle cellule germinali, si palesa il numero dei cromosomi, o parti del nucleo distinguibili al microscopio.

Il numero suddetto è un carattere costante per ogni specie zoologica, mantenendosi immutato nella generazione per effetto della divisione riduttrice che precede la fecondazione. Or bene sembrerebbe *a priori* naturalissimo di cercare in quel numero quasi un segno del grado raggiunto nella filogenesi; ma un'osservazione elementare dei fatti ci mostra invece la sua scarsa importanza in rapporto ai caratteri della specie. Basta infatti notare come l'*Ascaris megalocephala* (a cui si riferiscono gli studii dei più elementari fenomeni embriogenici) presenti due varietà *affatto simili*, l'*Ascaris univalens* e la *bivalens*. La cellula germinale della prima contiene *due cromosomi*, mentre quella della seconda ne contiene *quattro*!

Se dunque si vuol riattaccare una spiegazione dei caratteri degli animali alla costituzione della loro cellula germinale, questa spiegazione non può essere domandata a ciò che si vede nella cellula stessa; ma occorre spingere l'ipotesi più innanzi, col rappresentarsi la costituzione cellulare nelle sue parti invisibili.

D'altronde i multiformi fenomeni, che si collegano al protoplasma in genere, già inducono a ritenerne la struttura come enormemente complessa.

La sola spiegazione dei movimenti del plasma ha suggerito a molti autori varie rappresentazioni fisiche e chimiche di esso; citiamo, fra le più recenti, quelle di QUINCKE e BÜTSCHLI (il quale ultimo costruisce una sostanza a struttura alveolare mediante un miscuglio d'olio in una soluzione di carbonato di potassa); quella di BERTHOLD, che paragona il plasma ad una emulsione estremamente complessa in cui avvengono certi fenomeni osmotici e chimici; quella di VERWORN che (per render conto della sua contrattilità) lo raffigura come composto di molecole suscettibili di passare per tre stati, ossigenandosi e decomponendosi bruscamente. Queste teorie ci mettono già

[1] Cfr. IVES DELAGE: « La structure du protoplasma et les théories sur l' hérédité, et les grands problèmes de la Biologie générale ». Paris, C. Reinwald, 1895.

in faccia ad *immagini* ingegnose, se si vuole, ma anche un po' grossolane; il loro carattere primitivo e circoscritto conferisce loro d'altronde scarso valore scientifico, sicchè, nonostante la curiosa riproduzione delle figure cariocinetiche ottenute da BÜTSCHLI, pochi biologi sono disposti a scorgere in siffatti modi di vedere qualcosa di più di ammirevoli analogie; pochi le credono capaci di essere spinte molto innanzi suggerendo la scoperta di fatti nuovi. Da ciò la grande differenza che separa tali teorie dalle ontologie metafisiche, dove la rappresentazione più larga dà all'autore l'illusione di aver colto nella sua interezza tutta la realtà, o un dominio di essa.

Molto più vicine alla Metafisica appariscono invece le *teorie generali* sulla costituzione delle cellule germinali, teorie che prendono le mosse dalla constatata insufficienza delle nozioni fisico-chimiche sulla struttura del plasma,. in quanto almeno queste ci apprendono soltanto il numero o la qualità delle sue parti componenti, ma non i fenomeni speciali della vita che risultano dalla disposizione e dall'aggruppamento loro.

Nonostante lo stato molto più arretrato, queste teorie presentano nella costruzione una notevole analogia colle rappresentazioni fisiche, analogia tanto più spiccata nelle vedute moderne. allontanatesi dal fisicismo. Come i fisici hanno creato gli eteri e i fluidi a somiglianza dei corpi solidi, liquidi o gassosi, combinandone le proprietà a seconda dei fatti da spiegare, così i biologi hanno cercato di foggiarsi una rappresentazione della cellula germinale ad immagine di quella degli aggregati di animali unicellulari, o dei cormi, o addirittura delle società animali organizzate.

Essi ci rappresentano invero la cellula come un aggregato o un organismo di particelle cui sono tratti ad attribuire già certe proprietà elementari della vita; le parole stesse che usano per denotare le mutue azioni e reazioni di codeste particelle alludono chiaramente ad una siffatta rappresentazione.

Questo almeno è il carattere fondamentale delle più recenti teorie che il DELAGE chiama *micromeriste* e *organiciste*. Teorie scientifiche, si dice, non metafisiche; chè infatti esse non pretendono di costituirsi in sistemi universali, ma s'innestano invece sopra la rappresentazione atomica della materia; chè non si perdono nelle nebbie mistiche dell'antico animismo, nè tentano in alcun modo di porgere una spiegazione trascendente della vita.

Teorie *positive*, dice ancora taluno, perchè non perdono di vista i fatti e, secondo le osservazioni e le esperienze, vanno adattandosi e trasformandosi; ma codesto aggettivo non suona così, nella bocca dei biologi, secondo la sua rigorosa accezione, conformemente allo spirito comtiano che condanna le teorie della elettricità e della luce, e la stessa teoria atomica, pur dotate, in questo senso, di maggiore positività.

Positiva veramente non può dirsi una teoria, se non quando consista

puramente in *ipotesi di fatto*, ma qui invece, in qual modo raffigurarsi veramente, quasi esseri viventi, le *unità fisiologiche elementari* che si suppongono comporre la cellula, mentre è carattere fondamentale di questi di palesarsi come *organismi*?

Si può ripetere per l'ipotesi micromerista quello che si disse dell'ipotesi atomica; la veduta dell'atomo come di una particella di materia reale, urta nella difficoltà di spogliare questa particella di certi attributi fondamentali come la divisibilità; la veduta di un elemento fisiologico urta nella difficoltà analoga, di spogliare qualcosa che vive del carattere di organizzazione.

In ultima analisi se la semplice ipotesi di una certa costituzione fisico-chimica non rende conto adeguatamente della *vita* del plasma, il problema resta intero per le parti di questo che sieno già concepite come viventi, onde non si riesce veramente a concepire tali parti come *elementi*. Dal volere sfuggire a queste difficoltà nascono anzi le incongruenze, che la critica mette in luce nelle particolari teorie.

Queste osservazioni mostrano che si avrebbe torto di volere attaccare a codeste teorie biologiche un significato positivo, che non possiamo riconoscere neppure alle loro sorelle fisiche. Ma ciò non diminuisce il valore scientifico di esse come rappresentazioni o modelli, atti a suggerire ipotesi di fatto. Per convincersene non importa nemmeno penetrare addentro nella discussione delle teorie proposte da uomini come SPENCER, HAACKE, HAECKEL, DARWIN, WEISMANN, ROUX ecc. Basta dare un rapido sguardo ai problemi positivi che da esse vengono suggeriti. Come sono varii ed interessanti questi problemi, sebbene sia ancora così scarso il contributo di previsione che recano loro le anzidette teorie?

Intanto ciascun autore ha trasportato naturalmente nella rappresentazione della cellula germinale, le vedute che gli sono proprie in relazione alla vita degli aggregati animali o delle specie; la cosidetta *legge giogenetica* di HAECKEL, ammettendo un parallelismo fra l'ontogenesi e la filogenesi, tende a giustificare codesto trasporto, che è quasi una condizione per la fecondità delle immagini, cui danno origine le analogie ed i confronti innanzi accennati. Or dunque coloro che attribuiscono la causa principale della variazione delle specie all'ambiente esterno, sono indotti a spiegare del pari *epigeneticamente* la differenziazione del plasma ritenendo le unità fisiologiche del germe come equivalenti; all'opposto coloro che scorgono la causa principale della variazione nelle attitudini intrinseche della specie, si volgono invece a spiegazioni *preformistiche*, nel senso moderno della parola [1].

[1] L'antico preformismo, o evoluzionismo, ammetteva l'incastonamento dei germi, di guisa che l'uovo o lo sperma, (secondo gli ovisti o gli spermatisti) dovrebbe contenere in embrione tutti i discendenti, i quali non avrebbero che a svilupparsi. Questa assurda ipotesi

Ecco qualche esempio dell'influenza che tali vedute esercitano sulla ricerca.

La concezione epigenetica, suggerendo l'idea dell'*isotropia dell'uovo*, induce PFLÜGER a mettere in luce l'azione della gravità sullo sviluppo di esso, mostrando (con opportune esperienze su uova di rana fecondate) come i piani di segmentazione si dispongano perpendicolarmente alla forza che vi agisce; s'interpretano di solito queste esperienze come provanti l'*isotropia del citoplasma*. Ma per contro W. ROUX sostiene l'*anisotropia del nucleo*, conforme alla sua rappresentazione tendente verso il preformismo, e questa veduta lo guida ad esperimentare come avvenga lo sviluppo dell'uovo, sottratto con un lento moto rotatorio, all'azione della gravità, e induce CHABRY ad effettuare le sue ammirevoli esperienze sulle *Ascidie*, uccidendo alcuni blastomeri dell'uovo ed ottenendo delle larve incomplete.

Alla lor volta le conclusioni che sembrano suggerite da codeste esperienze trovansi in contrasto coi resultati di altre esperienze (DRIESCH, WILSON....) su anfibii, echini ecc., dove uccidendo un blastomero si ha la riproduzione di un embrione completo. Ed in appoggio della veduta epigenetica dell'isotropia dell'uovo, vengono anche talune osservazioni di Embriologia comparata, ad es. quella che i foglietti embrionali si equivalgono pei tunicati.

Tali apparenti contraddizioni non fanno che accrescere interesse ai tentativi volti a cogliere fatti così varii con una adeguata rappresentazione. E tuttavia gli esempi sopra citati non hanno che un rapporto indiretto colle vedute intorno alla costituzione del germe.

Più veramente si palesa l'importanza di siffatte vedute nelle questioni generali dell'eredità.

Fino a pochi anni or sono l'*eredità dei caratteri acquisiti* era generalmente accettata come un fatto, che mirabilmente si acconcia alle vedute epigenetiche. Ma ecco WEISMANN, mosso dalla sua concezione teorica del plasma germinale si solleva arditamente a contestarla, ed EMERY, accogliendo il fondamento di tale dottrina, viene a renderla più accettabile col temperare (mediante la ipotesi degli *enzimii*) il principio della non ereditabilità, relativamente agli effetti generali delle intossicazioni.

La recente polemica su questo tema fra SPENCER e WEISMANN è troppo nota. A noi non spetta di pronunziare un giudizio. Ma chi potrà disconoscere l'importanza di certe rappresentazioni, se esse hanno la virtù di suscitare un così istruttivo dibattito; se da esse si promuovono nuove osservazioni ed esperienze, nuove distinzioni di fatti, il cui valore obiettivo non può essere impugnato da alcuno?

è ormai abbandonata, in seguito agli studi embriologici col microscopio. Ma il nuovo preformismo postula l'esistenza nel germe di elementi diversi, rappresentativi, sia delle parti anatomiche dell'organismo adulto, sia dei caratteri o delle proprietà elementari di questo.

Ben sentiamo l'obiezione che taluno potrebbe opporci!

Per suscitare codeste discussioni proficue sono bensì necessarie certe vedute teoriche generali, ma che cosa ha che fare questo colla rappresentazione minuziosa del plasma, in cui Weismann si compiace? Forse che non è chiaro, come tanti particolari precisati da quell'autore, tante descrizioni di cose invisibili che spesso non possono neppure concepirsi come realtà, sono inutili sforzi di una fertile immaginazione, la quale vola lontano dalla veduta positiva dei fatti?

Rispondiamo: Weismann ha scorto alcune ipotesi di fatto attraverso una costruzione sistematica di immagini, allo stesso modo, come MAXVELL ha preveduto certi rapporti dell'elettricità e della luce attraverso il modello di una teoria, che non è essa stessa interamente un'ipotesi di fatto. Non attribuiamo a codeste vedute un valore positivo che non hanno; spingiamo anzi la critica a sceverare ciò che in esse è ipotesi fisica o biologica, da ciò che è puramente rappresentativo o psicologico. Ma non disconosciamo che una tale separazione riesce generalmente possibile soltanto *dopo* che la teoria ha compiuto il suo ufficio, non neghiamo soprattutto l'importanza di un procedimento d'acquisto delle conoscenze che si presenta come generale nello stadio costruttivo della Scienza, sol perchè esso non ha fin da principio i requisiti della cognizione positiva.

Anche la costruzione scientifica è un fatto, che bisogna studiare nella sua realtà psicologica, e di cui bisogna ammettere il valore conoscitivo quando delle questioni positive, in qualunque modo, ne vengono illuminate o risolte!

§ 26. **Positivismo psicologico.**

Una concezione che elimina dalla veduta del fatto l'elemento psicologico rappresentativo, non può lasciar posto ad una scienza propria delle rappresentazioni.

E però non dobbiamo meravigliarci che il sistema di COMTE riesca ad una negazione della Psicologia, tentando di ridurne lo studio ad un capitolo della Fisiologia. Invano gli sviluppi più recenti di HELMHOLTZ, FECHNER, WEBER, WUNDT ecc. apersero l'adito alla speranza di veder realizzato l'ideale positivista.

I resultati di tali ricerche ci hanno recato, è vero, una analisi delle sensazioni altamente preziosa; domani forse penetreranno nella investigazione di fenomeni più riposti; le associazioni delle immagini personali, i processi cerebrali che corrispondono a produzioni d'ordine più elevato, ne risulteranno chiariti. Il metodo fisiologico potrà riuscire così un sussidio di maggiore importanza nello studio analitico dei fatti psichici elementari.

Ma il concetto di ridurre a codesta analisi la conoscenza psicologica, urta in difficoltà analoghe a quelle che si oppongono alla riduzione della

Fisiologia alla Fisica. La sintesi psicologica sviluppa altri rapporti di quegli elementi: l'ordine di connessione psicologico dei fenomeni non è quello che corrisponde alla veduta della Fisiologia.

E però accanto alla Psicologia fisiologica vi sarà sempre posto per una *Psicologia di osservazione*, che la scuola inglese ha compresa in un senso positivo, dal LOCKE in poi; scienza comparativa, che seguendo il metodo di CLIFFORD denominato *eiettivo*, si estende con DARWIN, SPENCER, ROMANES ecc. alle manifestazioni psichiche degli animali, ed arriva a investigare sotto tale aspetto tutti i fenomeni primordiali della vita (Psicologia dei protisti di VERWORN).

Ma soprattutto rimane oggetto proprio della Psicologia, lo studio dei varii prodotti intellettuali e sentimentali della psiche umana: scienze, arti, religioni, lingue, istituti giuridici ecc.

Poniamo che sia pienamente illustrato il meccanismo fisiologico della ideazione musicale: il ritmo trovi corrispondenza in certe variazioni di tonalità nervosa, mutamenti di pressione sanguigna, fenomeni anabolici e catabolici ecc.; forse che la creazione artistica di BEETHOVEN risulterà in tal modo chiarita?

Si accordi al fisiologo di avere caratterizzato l'insieme dei fatti cerebrali che corrispondono ad una inferenza logica, in qual modo tale conoscenza potrà aiutarci a comprendere meglio il processo del pensiero onde NEWTON fu tratto alla sua scoperta immortale?

Altro chiediamo da una spiegazione di codesto processo; si tratta di rapporti per intendere i quali dobbiamo risalire a KÊPLERO e a GALILEO, e più in là ai precursori della Meccanica, nella scuola alessandrina. Ecco dei cervelli lontani, in cui si sono svolti dei fenomeni fisiologicamente dissociati; e la sintesi che ne domandiamo si ha dal tradurre codesti fenomeni in termini di pensiero, non dal tradurre il pensiero in termini fisiologici.

Esaminiamo l'evoluzione delle lingue. La Glottologia, la Grammatica comparata, fissano le leggi secondo cui esse si trasformano, siccome organismi viventi: sono leggi attinenti in parte ad elementi fonetici, in parte di pensiero. E poichè molteplici fenomeni svariatissimi si sommano in un effetto di media, non pare irragionevole di ricercare in talune di esse la traccia di cause fisiologiche permanenti.

Ma chi non vede quanto sarebbe folle di ritenere che la scienza del linguaggio si riduca un giorno allo studio della circonvoluzione di Broca?

Senza procedere oltre ad esemplificazioni ulteriori, teniamo abbastanza chiarita la tesi che il mezzo fisiologico non è mai da scambiare col fine della ricerca psicologica, cioè colla *cognizione atta a soddisfare le previsioni richieste in questo dominio.*

§ 27. **Positivismo storico e sociologico.**

La posizione di COMTE per riguardo alle scienze storiche e sociali, è abbastanza singolare, perchè le vedute sociologiche particolari del Maestro sembrano contraddire all'azione indiretta che lo spirito positivo esercita in questo campo.

La tendenza verso il consolidamento del fatto pone la ricerca storica a base delle scienze sociali, e di questa ricerca innova il metodo colla critica delle fonti. Ne consegue che il fatto storico venga concepito nella sua obbiettività come indipendente dalla rappresentazione tradizionale, spoglio di ciò che gli aggiunge la fantasia artistica, nella realtà ancor viva delle sue tracce materiali che sono i documenti svariati e molteplici.

Ma contro la particolarizzazione delle indagini che ne deriva, Comte ha sostenuto anche qui la necessità della sintesi. Coerente in questo all'insieme delle sue vedute, non sembra esserlo stato ugualmente nel riattaccare il principio di codesta sintesi alla *legge dei tre stati*.

Spiegare il progresso sociale collo sviluppo delle conoscenze dalla fase teologica alla metafisica e alla positiva, è sovrapporre ai fatti una rappresentazione ideologica, in contrasto colla tendenza che elimina in modo sistematico le rappresentazioni.

La critica più indulgente che si possa muovere consiste nel dire che l'elaborazione di una scienza sociologica richiedeva il passaggio di Comte per lo stadio metafisico!

Una fase di sviluppo ulteriore si può ritrovare infatti nella dottrina economica, nota ai giorni nostri col nome di « *materialismo storico* ». La quale dottrina perfettamente conforme allo spirito del positivismo, si manifesta ormai come un criterio direttivo importante della ricerca storica, in quanto vale a determinare una scelta dei fatti da studiare in ordine a certi interessi, ed una connessione di essi secondo nuovi rapporti notevoli.

Ma se si consideri invece il materialismo storico come veduta sistematica, che elimina o trascura altri fattori storici ed in ispecie quelli di ordine ideale, sorge l'opportunità di una critica rivendicatrice che restituisca il suo posto all'elemento psicologico. Contro alla tesi che le volontà operanti nel gruppo sociale e le idealità a cui esse sembrano ispirarsi, sieno determinate dalla pressione delle esigenze economiche, regge l'antitesi che i rapporti economici sono alla lor volta trasformati volontariamente in molti modi diversi, p. es. mediante gli istituti giuridici.

I quali possono essere compresi soltanto come *formazione storica*, da chi consideri insieme i *fattori* reali ed *ideali del diritto*; e ravvisi nella *forma concettuale* di questo, una unificazione delle norme riguardate come emanazioni di una supposta volontà continuativa, che assicura un « regime d'uguaglianza »,

e tende ad *estendersi per analogia*, in guisa da rispondere ad una *economia di volere* nella discriminazione dei conflitti d'interesse.

§ 28. **I fini positivi che si possono proporre ad una teoria della Scienza.**

Colla critica precedente abbiamo cercato di distinguere certi atteggiamenti propri della scuola positivista, che restringono la veduta della realtà scientifica all'elemento obiettivo, laddove sembra conforme allo spirito positivo rettamente inteso di considerarne anche l'elemento subiettivo.

Nel campo fisico e biologico l'elemento subiettivo tiene alla rappresentazione dei fatti, ed ha soprattutto importanza nel processo di acquisto della conoscenza.

Nel dominio delle scienze psicologiche e sociali, codesto elemento fa parte più intima del fatto da spiegare, in quanto vi si collegano direttamente le *previsioni* che la conoscenza ha come oggetto.

La distinzione fra subiettivo ed obiettivo non ha d'altronde che un valore relativo, e la considerazione della conoscenza nella sua integrità c'induce ad unificare la veduta delle cognizioni fisiche e psicologiche, facendoci scorgere qualcosa di psicologico già in fondo alle prime.

Ma, poichè le osservazioni precedenti hanno chiarito l'ufficio della critica tendente a scernere il subiettivo e l'obiettivo nella Scienza, rivelandoci come essa costituisca un fattore generale del progresso di questa, vediamo ormai sorgere dalla anzidetta critica i grandi problemi della *Gnoseologia positiva*, e riusciamo ad intenderne il significato e lo scopo.

Anzitutto sono da fissare i criteri che rispondono al nostro concetto della realtà obiettiva, in contrapposto all'illusione e all'errore dei sensi. Lo sviluppo veramente positivo di una tale ricerca, dovrebbe portare ad una larga applicazione della teoria nel dominio della Tecnica dell'osservazione e dell'esperienza: la correzione dell'*errore personale* nelle misure geodetiche ed astronomiche ne porge un esempio istruttivo.

Ma accanto al dato dell'organo di senso nella sensazione, si trovano nel processo della conoscenza i dati della elaborazione psichica.

Lo stesso concetto primitivo della realtà, si allarga e s'integra; il fatto bruto si evolve assumendo i caratteri del fatto scientifico. Qual'è la forma di questo processo, e come e quanto si possono distinguere in essa gli elementi subiettivi ed obiettivi? Che cosa rimane quindi di arbitrario nella Scienza, e quale significato deve attribuirsi a codesta arbitrarietà?

L'analisi del fatto ci condurrà dapprima a questo resultato generale, che la conoscenza scientifica tende ad effettuarsi per mezzo di concetti, e ci porgerà quindi alcuni criterii fondamentali per la valutazione delle teorie scientifiche.

Ora nella formazione dei concetti scorgeremo, non soltanto una *economia* del pensiero (conformemente alle vedute del MACH), bensì anche uno *sviluppo psicologico* fino ad un certo punto determinato, il cui studio ci condurrà a discutere per una parte i *problemi della Logica*, per l'altra *l'acquisto dei concetti più generali* della Geometria e della Meccanica, il loro significato reale e la loro progressiva estensione. Sono questi primi *problemi della Scienza* che debbono costituire, nel nostro intendimento, una *introduzione* alla Gnoseologia positiva.

Qui vogliamo ancora mettere in evidenza il duplice aspetto secondo cui tale scienza gnoseologica può essere considerata, ove la si riguardi sotto un punto di vista logico o psicologico.

Nel primo aspetto, proprio alle scienze della natura, la critica si volge al reale, e intende a indagarlo come oggetto del sapere indipendente dalle cause d'errore che tengono alla debolezza del nostro intelletto. La Gnoseologia così intesa viene ad integrare la Logica propriamente detta, della quale importa restringere il significato, seguendo una rigorosa interpretazione della parola, affinchè lo studio che concerne la coerenza formale del ragionamento non tolga la lucida visione delle basi empiriche della conoscenza di fatto.

Ove si assegni alla Logica di dettare lo schema rigoroso della dimostrazione e della definizione, rimane posto ad una ricerca più larga volta ad indagare il processo per cui il materiale greggio delle sensazioni si lascia subordinare ad uno schema siffatto. Del resto il puro esame logico si conchiude in un giudizio formale, respingente le deduzioni erronee, e rifiutante di ragionare su concetti mal definiti; mentre in questo campo si esercita invece la critica gnoseologica, per la quale ogni procedimento scientifico, sia pure imperfetto, rappresenta un tentativo e generalmente un passo verso la realtà, ed ha in questo senso un valore che non deve essere trascurato.

Più chiaramente diciamo che la Logica segna la via ideale del procedimento di costruzione scientifico, dove la Gnoseologia positiva ne addita la via reale; cadono nel dominio della prima soltanto i metodi di prova, (e propriamente, secondo il nostro concetto, di prova formale o analitica), mentre appartengono alla seconda anche i metodi di scoperta.

A questo scopo si riattacca la considerazione della teoria della conoscenza nel suo aspetto psicologico. Il procedere dell'intelletto umano, indipendentemente dalla rispondenza colla realtà del resultato raggiunto, deve formare oggetto di un'indagine particolare; la quale di mezzo agli elementi variabili ritrovi i dati subiettivi nella rappresentazione del fatto, illuminando così la funzione psicologica del conoscere.

Le due ricerche si legano e convergono ad un fine comune per rispetto alla Scienza: una separazione progressiva del subiettivo e dell'obiettivo nei varii ordini di conoscenza, e un giudizio comparativo delle teorie scientifiche

in relazione ai fatti stabiliti che esse spiegano e riassumono, ed alle scoperte che sembrano capaci di suggerire.

Fra gli scienziati moderni HELMHOLTZ sopra tutti sembra aver avuto una lucida visione dell'ufficio, che la Gnoseologia è chiamata ad esercitare per rispetto alla Scienza.

È un suo titolo di gloria aver proclamato che la discussione di ogni ordine di questioni scientifiche fa capo a problemi dell'ordine gnoseologico. Ma non si potrà giudicare convenientemente dell'utilità di trattare questi problemi in un senso generale, fino a che la teoria positiva della conoscenza, resa indipendente dalle controversie filosofiche, non sia costituita per l'opera comune di tutti i cultori della Scienza.

Allora soltanto apparirà quale insegnamento la discussione di una teoria scientifica possa recare nel giudizio di un'altra teoria, che si riferisca ad un diverso dominio di fatti, e come ad es. possa giovare al biologo, più ancora che lo studio dei *resultati* della Fisica, la critica dei modi di svolgimento e del contenuto delle teorie fisiche, esaminate sotto l'aspetto gnoseologico.

Frattanto l'importanza di tali ricerche emerge da ciò che è stato fatto in questo senso. Soprattutto alcuni acquisti positivi della critica appaiono, ai nostri giorni, in una luce sempre più chiara, per opera di pensatori, i quali tendono ad emanciparli progressivamente dalla indeterminatezza, che appartiene alle speculazioni filosofiche anteriori, in cui si può ravvisare il germe. Confortante promessa per chi volga i suoi sforzi in quest'ordine d'investigazioni!

§ 29. **I metodi: storico, psicologico, scientifico.**

Perchè l'azione della Gnoseologia su tutti i rami del sapere si faccia più diretta ed attiva, conformemente alle esigenze del progresso, si deve accuratamente separare, con una critica rigorosa, l'oggetto particolare della Scienza gnoseologica dai molteplici oggetti che cadono nel dominio della Filosofia, intesa nel suo significato più largo.

Si può accedere allo studio dei problemi della conoscenza, per tre vie:

Anzitutto per mezzo della Storia del pensiero, come oggi generalmente si pratica nel nostro paese.

Ma questo metodo non può essere realmente fecondo se non si prosegue lo studio delle idee, guardando allo sviluppo delle loro conseguenze determinate nel campo delle scienze particolari.

Abbiamo già accennato al concetto che ci formiamo della Filosofia, come di una tendenza dello spirito umano verso l'unità e la generalità, nell'ordine delle conoscenze e nell'ordine dei fini. E abbiam detto come questa tendenza si esplichi ugualmente nel processo costruttivo della Scienza e nei sogni poetici

della fantasia non infrenata da un senso vivo della realtà. Del resto, manca tra questi dominii, una distinzione netta, di guisa che il nascere di una scienza non differisce troppo da uno di quei semi-sogni che si fanno presso al risveglio.

Appare quindi il pericolo di una preparazione storica che si rivolga esclusivamente all'aspetto indeterminato della Filosofia. Uno spirito sano è facilmente condotto per questa via a quella forma di scetticismo, che accorda a tutte le idee un ugual valore, sotto la sola condizione che si ritrovino in esse alcune qualità di coerenza del pensiero con se stesso.

Questo punto di vista può convenire alla Storia, per cui ogni Filosofia è il segno di una direzione dello spirito umano, e sotto tale riguardo costituisce di per sè un oggetto interessante di studio. Ma esso è pericolo per la Scienza, dove importa soprattutto distinguere la verità dall'errore. E rischia spegnere quella fiamma animatrice che accende nel filosofo l'amore della scoperta.

Ma anche, indipendentemente dal pericolo accennato testè, varii esempi dimostrano come, nello studio delle questioni della conoscenza, la pura visione delle idee generali dibattute nel campo filosofico riesca inadeguata. E perciò la storia della Filosofia, se voglia soccorrere utilmente ai problemi gnoseologici, deve integrarsi colla storia della Scienza, siccome appunto essa viene concepita da uomini che perseguono lo sviluppo del pensiero e la serie delle scoperte, al disopra della vita degli scopritori.

Si tratti, ad es., di discutere l'importanza della distinzione fra *quantità* e *qualità*.

Per KANT questa distinzione è stabilita a priori subiettivamente. STUART MILL ha ripreso lo stesso concetto mettendolo, per quanto ci sembra, in una forma più chiara: le differenze che hanno radice in un diverso ordine di percezioni non sono suscettibili di un confronto quantitativo, cioè fanno capo a conoscenze qualitativamente irriducibili.

In questo senso sono qualitativamente irriducibili calore e movimento, elettricità e luce.

In che rapporto stanno tali affermazioni col principio cartesiano che tutto, nel mondo fisico, si *spiega* coll'estensione ed il moto?

L'esame della controversia filosofica potrà portare soltanto a questa conclusione generale: che, comunque le differenze di qualità si facciano corrispondere a differenze quantitative di un processo unico, la conoscenza completa dei fatti non si risolve in una tale *spiegazione*; ad es., la conoscenza dei fenomeni ottici non potrà esaurirsi in quel capitolo dell'Ottica che costituisce la teoria meccanica della luce presa in senso stretto.

Ma nella Scienza positiva la questione si pone in un modo diverso. Cioè si domanda se, ad ogni modo, i fenomeni qualitativamente varii del mondo fisico, possano venire rappresentati con un processo unico che ne porga

il modello, nel quale sieno da considerare soltanto differenze di quantità (Cfr. cap. VI).

Proseguiamo la rivista dei metodi che convengono ai nostri scopi.

Al metodo storico si può, in un certo senso, contrapporre il metodo fisio-psicologico come fu inteso da HELMOLTZ.

Cogliere lo sviluppo delle conoscenze non più nella serie fenomenica che la Storia ce ne offre, ma attraverso lo studio degli organi di sensazione e di pensiero, sembra costituisca la via diretta per accedere alle questioni gnoseologiche.

Ma già abbiamo accennato alle difficoltà di una siffatta indagine fisiologica, e senza menomare il pregio di taluni acquisti emersi dall'analisi delle sensazioni, insistiamo ancora che esiste un altro ordine di connessione sintetico, in cui importa soprattutto di considerare gli oggetti psicologici, in ispecie quelli cui si riferisce il nostro studio.

Per riguardo a codeste connessioni anche il metodo psicologico della evoluzione appare insufficiente, almeno nel modo come esso viene inteso da SPENCER, a fornire una vera spiegazione dei problemi della conoscenza; non tanto a cagione delle vedute esclusivamente epigenetiche di questo filosofo, quanto per il carattere particolare delle questioni stesse di cui si tratta.

Il procedimento della conoscenza, sebbene sorga da uno sviluppo continuo, ha un significato qualitativo discontinuo. Cioè, ad un certo punto dell'evoluzione psicologica, una certa condizione del pensiero può acquistare per rispetto alla conoscenza, un valore che non possedeva innanzi a nessun grado. Inoltre la Psicologia evolutiva, volgendosi allo studio dei fenomeni più semplici, resta lontana dall'oggetto proprio di una Gnoseologia, che si proponga di chiarire il processo di formazione della Scienza la più elevata.

Un terzo metodo che si palesa fecondo nello studio dei problemi gnoseologici, consiste nell'esame critico diretto della Scienza, riguardata essa stessa come il fatto da spiegare.

È un metodo di osservazione e di confronto anologo a quello delle scienze naturali.

Conviene del resto considerare la conoscenza nel più alto grado del suo sviluppo, piuttosto che la conoscenza volgare.

Il botanico, il quale trova difficile distinguere nell'embrione le parti costitutive, non ha che da lasciar crescere la pianta, perchè queste gli appariscano nettamente differenziate. In modo analogo lo sviluppo scientifico dei concetti mostra l'importanza degli elementi dell'ordine fisico e dell'ordine psicologico, da cui la loro formazione è risultata.

Ciò apparve chiaramente all'autore di questo scritto, per la prima volta nella Geometria, quando vide tre rami di codesta scienza staccarsi dal tronco

comune, presentando un'elaborazione completa dei dati dei sensi diversi, da cui la rappresentazione dello spazio trae la sua origine. Ma non è qui il caso di discutere per incidenza tale questione, che formerà oggetto di uno speciale capitolo.

Vogliamo soltanto aggiungere a quanto abbiam detto innanzi sul metodo scientifico, che non basta contemplare e coordinare in una sintesi i resultati generali della Scienza; occorre propriamente farne la critica sotto l'aspetto logico e psicologico, che conviene agli scopi della Gnoseologia sopra definiti.

Così appunto, per difetto di una critica siffatta, il positivismo di AUGUSTO COMTE non ha risposto in alcun modo ai problemi della conoscenza, sebbene il rinnovamento della Filosofia per mezzo della Scienza sia stata la grande idea del Maestro. Onde sotto l'aspetto gnoseologico appare superiore il positivismo inglese di STUART MILL, di BAIN, di LEWES, ecc., quantunque questi filosofi non abbiano posseduto forse una visione altrettanto larga e profonda delle scienze particolari.

•

La nostra conclusione non può essere in alcun modo di dare l'ostracismo ad un metodo, per accordare ad un altro una preferenza esclusiva.

Lo studio della Scienza, concepita come un « fatto », deve aiutarsi degli insegnamenti della Storia e dei resultati della Psicologia.

Ma importa soprattutto che la Gnoseologia venga concepita essa stessa come una vera scienza positiva; che cioè i suoi cultori si propongano problemi determinati, e li trattino con procedimenti, fin dove è possibile, rigorosi. Dia chi vuole libero sfogo alla sua fantasia, abbandonandosi ai sogni della Metafisica. Ma questa poesia di spiriti sublimi, che ognora si rinnoverà come espressione di un bisogno dell'anima umana, non deve imporre la sua sregolatezza alla Gnoseologia positiva che a lei resta estranea.

Vi è in quest'ultima un oggetto reale da spiegare, e quindi problemi effettivi da risolvere, che non debbono dipendere dalle opinioni incostanti dei filosofi e dagli interessi *sociali*, che le determinano.

Quelli potranno emanciparsene in una certa misura, ove ci si accordi a bandire sistematicamente ciò che tiene ai procedimenti trascendenti della ragione.

La ricerca che mira a rispondere ai *problemi della Scienza*, deve soddisfare a questa condizione logica, cui ogni ramo dello scibile è ugualmente subordinato, ove miri a significare in un senso qualsiasi dei « fatti ».

Entro questi limiti una intesa di tutti gli studiosi sembra possibile a costituire, indipendentemente dalla Metafisica, una Gnoseologia positiva, la quale dovrà a sua volta riaffermare quella collaborazione scientifica che desideriamo come istrumento di un più alto progresso.

lo

ɔ

CAPITOLO II.

FATTI E TEORIE

§ 1. **Sogno e realtà.**

Fra le novelle arabe che la tradizione ci ha tramandate sotto il titolo di « Mille e una notte », ci sovviene di quella ove si racconta la bizzarra avventura occorsa ad un « dormiente svegliato ».

Per ordine del califfo di Bagdad, Abou Hassan, addormentato con un narcotico, viene trasportato nel palazzo e messo al posto del suo sovrano, che si diverte a fargli credere di essere il califfo.

Il pover'uomo si sveglia in mezzo ad una gran camera, magnifica per ricchezza di addobbo, avendo intorno a sè una corona di dame che tengono nelle mani strumenti di musica, pronte a suonare, e d'eunuchi neri sfarzosamente vestiti, tutti in piedi, atteggiati ad un profondo rispetto. Gettando gli occhi sulla coperta, si accorge che è di broccato d'oro a fondo rosso, ornata di perle e di diamanti; presso al letto gli appare un abito della medesima stoffa pure scintillante di gemme, e sopra un cuscino, accanto a lui, un berretto di califfo.

Ad una tal vista Abou Hassan rimane estremamente confuso. « Eccomi califfo », dice a se stesso; però subito correggendosi « non debbo ingannarmi, io sogno ». Ma, come richiude gli occhi per dormire, gli eunuchi gli rivolgono rispettosamente la parola, chiamandolo col nome del sovrano « capo dei credenti ».

Sorpreso delle parole che ascolta, e dolcemente cullato dalla visione a cui esse lo richiamano, si sente pur tormentato dal dubbio. « È mai possibile che non riesca a distinguere se sogno o se posseggo ancora il mio buon senso? » Quindi, fatto cenno ad una dama di avvicinarsi « Tenete, le dice porgendole la mano, mordetemi il dito, ch'io senta se dormo o se sono sveglio ». E poichè la dama, obbediente all'ordine ricevuto, gli serra leggermente fra i denti l'estremità del dito ch'egli ha messo innanzi, Abou Hassan, ritirando subitamente la mano, esclama « sono proprio sveglio.... ».

C'è in fondo a questa pittura un vero spirito filosofico. Poichè noi vediamo nel procedere di Abou Hassan, il modo che generalmente viene tenuto da ogni uomo, il quale voglia chiarirsi intorno ad un'impressione qualunque, se abbia ragione di dubitare che essa corrisponda veramente a qualcosa di reale.

In casi analoghi, sia risvegliandosi dopo un sogno, sia quando l'apparire di alcunchè di strano, turbi il corso regolare delle nostre aspettazioni, noi cerchiamo di uscire da quello stato di passività dello spirito nel quale si cullano tutte le illusioni, sforzandoci di provocare volontariamente una sensazione nuova, preventivamente nota. Giudichiamo infine da questa, constatando il suo accordo coll'attesa anteriore.

§ 2. **Illusioni dei sensi.**

Alcuni esempii mettono in luce come all'osservazione precedente spetti un alto grado di generalità.

Una bambina di un anno, già si compiace a guardarsi nello specchio. Io mi diverto talvolta a farla passare al di dietro di questo; eccola fiduciosa di vedere, e pronta a ghermire colle mani, l'immagine che le appariva testè. Poichè non vi è più niente, essa rimane interdetta.

Allora vuol ripetere l'esperienza; ancora una volta, sebbene un po' inquieta, si avanza a ghermire la sua immagine. Ma bisogna ricominciare di nuovo, poichè, man mano che la sua inquietudine diminuisce, essa prende al giuoco un piacere più grande.

Infine vedendo che, nelle medesime condizioni, il medesimo fatto si riproduce sempre lo stesso, finisce per ridere dell'inganno a cui non presta più fede.

I viaggiatori che marciano nelle lande sterminate del deserto sabbioso, sotto un sole cocente, apprendono a loro spese, in un modo del tutto analogo, che cosa sono i miraggi.

Per un effetto di refrazione, che MONGE riconobbe dipendere dallo stato estremamente rarefatto degli strati inferiori dell'atmosfera, si vedono talvolta distinte le immagini diritte e capovolte degli oggetti posti all'orizzonte. Così agli assetati viaggiatori il terreno sembra terminato da un'inondazione generale, ogni monticello di sabbia rispecchiandosi nella sua immagine, come fosse circondato da acqua. Ma quando, affrettata la marcia, i miseri giungono sul posto ove la visione lusinghiera li chiama come una dolce promessa, che cosa scoprono essi, se non della terra infuocata e dell'arida sabbia?

Occorrono nell'Ottica varii casi analoghi d'illusione, che, sotto un diverso aspetto, interessano medesimamente il fisico ed il fisiologo.

In questi casi è sempre facile scoprire l'errore, mediante una prova espressamente preparata, in guisa da dare una risposta decisiva. L'essenziale è di variare le condizioni sotto cui il fenomeno si manifesta, il che si ottiene nel modo più sicuro se, in luogo della vista, si fa intervenire come giudice un altro senso, ad es. il tatto.

Ma si può anche rendersi conto di un'illusione ottica senza uscire dal campo dell'esperienza visiva, come appunto accade negli esempii sopra citati. Basta in ogni caso studiare le condizioni in cui la visione si effettua, e scoprire ciò che deve essere cambiato per eliminare la causa d'errore.

Del resto, non la vista soltanto, ma ciascuno dei sensi può illuderci in determinate circostanze.

L'orecchio ci trae in inganno col fenomeno ben noto dell'eco, che pertanto è facile a scoprire, cambiando opportunamente di posto.

Il tatto stesso, il senso nel quale riponiamo la più cieca fiducia, non è esente da alcune cause d'errore, fortunatamente assai rare. Basti ricordare la semplicissima esperienza che consiste nel toccare i due lati di una pallina colle dita incrociate; si ha la percezione che vi sieno due palline in luogo di una sola.

§ 3. **Il criterio della realtà.**

L'analisi dei procedimenti che impieghiamo quando si tratta di chiarire la realtà, c'illumina mostrandoci che cosa esiga la nostra credenza in un fatto reale. Essa ci aiuta così a determinare i caratteri del reale, e ci conduce quindi, naturalmente, ad una *definizione positiva della realtà*.

Appare, in ciascun caso, come non si tratti soltanto di dati di sensazioni passive; non basta *vedere*, ma occorre vedere ciò che si *guardi* da un certo posto o in tali o tali altre condizioni volontariamente disposte; non basta *udire*, ma occorre udire ciò che si *ascolti*, in tale o tale altro modo secondo ci piaccia, ecc. E bisogna che, secondo un aggruppamento fisso, tutte le sensazioni attese, della vista, dell'udito o del tatto, si producano in un modo preveduto sotto certe ben note circostanze nelle quali ci poniamo. Se ne manca una sola, che appartenga al fatto in modo essenziale, la delusione dell'attesa ci apprende che la nostra credenza al fatto era erronea.

Cioè *la nostra credenza a qualcosa di reale, suppone un insieme di sensazioni che invariabilmente susseguano a certe condizioni volontariamente disposte*.

E poichè il verificarsi delle condizioni accennate forma oggetto alla sua volta di altre sensazioni, la credenza nel reale suppone in ultima analisi un *rapporto associativo* fra sensazioni; sia che si tratti di uno di quei rapporti più fissi e familiari che ci figuriamo come un *oggetto*, sia di uno di quei rapporti (di 2° grado) che pensiamo come una *relazione fra oggetti*.

Occorre però tener presente che il concetto di « rapporto associativo fra sensazioni » è più generale di quello che abbiamo in vista di definire; sempre « la rispondenza delle sensazioni all'attesa voluta » costituisce il vero carattere del reale. Onde troviamo qui la definizione positiva della realtà.

Ma questo modo di presentare le cose urta a primo aspetto, non apparendo conforme alla loro ordinaria rappresentazione.

Si concepisce il reale, come qualcosa che sia fuori di noi, indipendentemente da ogni esperienza, e l'accordo fra certe condizioni subiettive e le sensazioni che ne seguono, come una *prova* della realtà, la quale tuttavia non cesserebbe di *esistere di per sè stessa*, se pur fosse rotta ogni comunicazione del nostro spirito col mondo esteriore.

Riflettendo però, come possa comprendersi un'esistenza *di per se stessa*, ci si avvede che l'espressione è vuota di senso, a meno che non si voglia significare l'*impotenza della volontà a modificare le sensazioni che riferiamo al reale*, senza mutare le condizioni a cui queste si riattaccano.

Abbiamo già avuto occasione di ricordare, come la filosofia moderna sia piena di questa grande controversia che tocca il cosidetto problema della realtà. Il nodo della difficoltà sta nella posizione del problema stesso. Se il reale viene preso in un modo trascendente, attribuendogli un significato di per sè, inteso come assoluto, si cade in un idealismo scettico, facendo sorgere innanzi ai nostri occhi il fantasma dell'inconoscibile. Ma se si respinge codesto significato trascendente, come vuoto di senso, ci si avvicina al fenomenismo di E. MACH, o alla interpretazione dell'idealismo del nostro G. VAILATI, vedute in sostanza equivalenti. L'idealismo così interpretato non merita più neppure questo nome, perchè non include alcuna affermazione agnostica; non è una negativa del reale, ma (come dice il Vailati) una *definizione* di esso.

Tuttavia codesto atteggiamento del pensiero non toglie che il problema della realtà conservi un senso positivo, in quanto si tratti di «distinguere relativamente il reale dal non reale ».

Per questo aspetto della questione (che fin dal principio delle nostre speculazioni ci apparve come fondamento necessario di ogni costruzione positiva), il nostro modo di definire il reale si distingue da quello del Mach, poichè il criterio del reale vien posto, non semplicemente nelle « sensazioni », ma nelle « sensazioni associate a certi atti volontarii ».

D'altronde l'ufficio della volontà, in contrapposto alle rappresentazioni passive, emerge dalla Metafisica dello SCHOPENHAUER, e sotto diversi aspetti viene riconosciuto nell'indirizzo empirico della filosofia inglese [1].

[1] Conviene citare particolarmente JULIUS PIKLER: « *The psychology of the believe in objective existence* ». (Williams and Norgate, London, 1890); opera che mi fu segnalata dopo la pubblicazione della prima edizione di questo libro.

Codesto riconoscimento ha una base nello studio dei fenomeni dell'attenzione, e segnatamente nei fatti rivelati dalla Psicologia fisiologica, che concernono l'adattamento degli organi di senso e l'ufficio dei nervi motori. Così, p. es., l'Ottica fisiologica ha chiarito quale parte spetti all'accomodamento dell'occhio, e ai movimenti volontarii di questo, nella visione.

§ 4. **Il supposto nella realtà.**

Cerchiamo di stringere più da vicino la definizione della realtà, e vediamo quindi come si estenda.

Il nostro criterio contempla direttamente la constatazione del reale, nell'atto in cui essa si compie. Tuttavia la credenza in qualcosa che fu percepito come reale, permane nella nostra mente come quella che ci dà un *invariante*, sia che si tratti di un oggetto materiale o di una relazione fra oggetti. Vi è in ciò la *supposizione* che, riproducendo le condizioni richieste, si riproducano le sensazioni che trovammo legate ad esse, in modo *invariato*.

Nel caso più semplice, codesta supposizione equivale a fingere una constatazione *permanente* che crediamo potere aggiungere alla realtà presente. Vi sono però altre cose reali che pensiamo come aventi un'esistenza nel tempo: p. es., un'azione, un movimento, ecc., che pure si possono riprodurre in condizioni determinate. Anche qui riconosciamo un invariante, ma in un senso più largo.

Ma altre riflessioni ci costringono ad estendere ulteriormente questo concetto della realtà.

Quando si tratta di un fenomeno, che riguardiamo compiuto nel tempo, noi ci poniamo la questione, indipendente dalla sua riproducibilità, se esso *fu realmente* in un dato momento. La sussistenza *storica* di un fatto, e l'invarianza di un certo rapporto fra condizioni e sensazioni riconosciuto in esso, appariscono due questioni ben distinte. La differenza è proprio irreducibile?

Sospendiamo il giudizio e volgiamoci ad un'altra riflessione.

Le condizioni di un fatto, non sempre sono riproducibili a volontà; talora s'incontrano per ciò delle difficoltà che vanno fino ad una impossibilità pratica; talora occorre aspettare il verificarsi di circostanze che non dipendono da noi o ne dipendono soltanto in parte. In questi casi la credenza nel fatto non può tradursi ad ogni momento in un'attesa; per dir così il reale non è sempre disponibile. Che valore ha allora il supporre che esso si aggiunga alla realtà presente?

Riflettiamo. I fatti che sono nella realtà presente vengono delimitati volontariamente da noi. Così, p. es., vediamo delle finestre, delle porte, ecc., oppure la facciata di una casa; degli alberi, delle piante, dei viali o un giardino, ecc. Insomma gli elementi associati a comporre più oggetti possono associarsi in un altro ordine di rapporti a formare altri oggetti, od un oggetto

solo. E lo stesso può dirsi in generale delle relazioni fra oggetti. Un piccolo numero di atteggiamenti diversi del nostro pensiero, può svolgersi con quella intensità viva, che appartiene all'intervallo di tempo denotato come « presente »; e, dentro questo intervallo una cosa reale non è isolata, ma può entrare in diversi gruppi associativi. L'esistenza di una cosa reale nel presente, importa appunto la possibilità di codeste associazioni.

Ora la credenza in cose reali non attualmente percepite ha questo valore: permette di stabilire nuovi *rapporti associativi* fra gli elementi delle nostre percezioni.

Perchè questi rapporti si stabiliscano, non importa neppure che vi sia stata prima una constatazione diretta; in un modo più generale essi possono venire *supposti* per mezzo di altre associazioni date, ed, in quanto corrispondono a qualcosa che è pensato come *invariante*, costituiscono ancora per noi un *reale* (*supposto*).

Soltanto il modo d'acquisto della conoscenza è diverso nel caso di fatti propriamente supposti, e di fatti che furono percepiti: l'associarsi di certe sensazioni alla rappresentazione di certi atti volontari deriva in questo caso immediatamente da *ricordi*, in quello ne risulta più o meno mediatamente, attraverso un'operazione intellettuale, che nella sua forma più alta costituisce un ragionamento. Ma, all'infuori del modo d'acquisto, realtà percepita e realtà propriamente supposta significano ugualmente, nel presente e nel futuro, l'*attesa di certe sensazioni in condizioni determinate*, più o meno dipendenti dalla nostra volontà.

Se è possibile disporre le condizioni richieste, noi andiamo a constatare direttamente le sensazioni che vi si collegano, o a dichiarare il nostro errore, ove l'attesa sia delusa. Ma se ciò non è *attualmente* possibile, la nostra credenza conserva un valore, sia per riguardo a possibilità future, sia in quanto il fatto supposto implica alla sua volta nuovi rapporti associativi che possono essere constatati, e condurre ad una *verifica indiretta* di quello.

Si deve considerare la supposizione, nel suo più largo senso, come essenziale per riguardo alla realtà di cui viviamo; un incremento del reale in questo senso si accompagna allo svolgersi della nostra vita di relazione, di cui entrano a far parte nuovi paesi lontani non mai visitati, persone non vedute, relazioni inferite senza verifica diretta.

§ 5. **Realtà del passato.**

Siamo ora in grado di rispondere alla domanda « in qual senso sia possibile di trovare qualcosa d'invariante nella realtà storica di un fatto passato ».

Il ricordo del fatto, se esso fu percepito, conserva già un certo rapporto associativo determinato fra le sensazioni rievocate. Ma, indipendentemente dalla percezione, la realtà o meno del fatto ha un significato che si traduce nella

realtà del presente e del futuro, ed implica (per mezzo di associazioni indirette) certe attese determinate. Sotto questo aspetto diventa possibile di sceverare il reale e il non reale del passato, e di apprezzare l'errore dei ricordi. Un'impressione mendace è cancellata dal nostro mondo (a parte certi riflessi psicologici) ove sia scordata; ma non così un fatto, che annodandosi per via di rapporti col presente, vive ancora, intorno a noi, nelle sue tracce.

In questo senso la realtà storica importa essa pure la credenza in una serie di invarianti, quando essa sia presa in un largo senso come una supposizione, intermediario associativo delle sensazioni attuali e future.

Fin qui abbiamo assunto, anche nella visione del passato, quell'atteggiamento *attivo* dello spirito, che tiene gli occhi rivolti sul presente e sull'avvenire. Ma non si può disconoscere che un diverso atteggiamento *contemplativo* del passato, considera in altro modo il decorso delle sensazioni, idee, volizioni. Secondo questa *intuizione* propriamente *storica*, i ricordi vengono riavvicinati in guisa da ricostruire nella sua successione temporale la nostra vita psichica e rievocare quindi, in una *rappresentazione sintetica*, le emozioni che vi sono connesse.

Ora codesta ricostruzione storica interessa il problema del reale, proseguito secondo una *intuizione scientifica*, in quanto conduce ad analizzare meglio il concetto di sensazioni o volizioni *riproducibili*.

In tale concetto è implicita la possibilità di confrontare codesti dati elementari del presente e del passato, di *riconoscere* cioè una sensazione passata in una presente. Ma la ricostruzione anzidetta ci avverte che questo riconoscimento non è un giudizio d'identità; che almeno l'intensità delle sensazioni, e lo stato emotivo connesso, si affievoliscono nei ricordi; che insomma i nostri dati elementari, presi per riguardo ad uno stato di coscienza, posseggono una *individualità* caratteristica nel tempo.

Sembra che si sia abusato di questa osservazione, in certi recenti indirizzi *antiscientifici* del pensiero. La sola conseguenza legittima che se ne deduce, è che le sensazioni e volizioni considerate come *uguali*, possono distinguersi in un ordine più esteso di considerazioni (dica chi vuole, che sono soltanto *simili*), e che perciò codesti dati entrano a costituire il reale soltanto come *elementi astratti*, cioè rappresentanti di certi elementi (riconoscibili) che *si corrispondono* entro gruppi diversi di sensazioni e volizioni effettive.

Ora, se da ciò si vuol trarre che le attese contenute nella conoscenza del reale, e le stesse prove verificatrici, hanno sempre un *carattere approssimato*, onde al riconoscimento di sensazioni *note* si aggiunge ogni volta qualcosa di nuovo e si toglie dell'antico, non si dirà veramente nulla di peregrino, nulla di opposto al modo relativo di considerare la *conoscenza*, che la filosofia positiva ha comune colla gente del volgo.

§ 6. **Realtà psicologica.**

Il carattere *sui generis* del supposto psicologico merita di essere rilevato.

Che cosa significa *per me* la supposizione delle sensazioni, idee, volizioni, ecc., degli altri? Ed in qual senso posso riconoscere qui qualcosa di reale?

Allorchè si osservano in altri certe espressioni (azioni, ecc.), confrontandole con espressioni simili di un nostro stato di coscienza, oppure cercando di mettersi con questi in una certa *consonanza spirituale*, in guisa da reagire similmente a stimoli simili, nasce in noi una particolare sensazione o rappresentazione delle sensazioni, idee, volizioni, ecc. altrui, che viene così associata alle condizioni d'osservazione suddette. Tale coordinamento associativo costituisce una supposizione intermediaria, a cui si legano certe attese relative alle azioni degli uomini, e alle loro diverse espressioni in particolari circostanze.

Ma la credenza di cui si tratta, implica qualcosa di più che questo rapporto puramente esterno; vi si aggiungono taluni elementi che distinguono il supposto psicologico da altri oggetti supposti, cioè:

1) un valore emotivo proprio della « sensazione » di uno stato di coscienza altrui, sia, p. es., quello che si accompagna alla sensazione dell'altrui dolore, ecc.;

2) una determinazione o limitazione che ne risulta per la nostra volontà, paragonabile a quella che proviene dall'impotenza di modificare le sensazioni date dalla realtà fisica (§ 3), ma di genere diverso.

Per questi caratteri appunto la credenza psicologica si ravvicina al tipo già considerato della credenza nel reale; per l'ultimo soprattutto, la realtà di qualcosa di psicologico *in sè*, assume un significato proprio: le sensazioni, le idee, le volizioni altrui importano una modificazione della nostra volontà, simile a quella che gli analoghi elementi del nostro mondo psichico producono sulla volontà stessa.

In qual modo avvenga codesta modificazione, è un problema che noi ci proponiamo qui di risolvere e però ci asteniamo dal ricercare come il rapporto reciproco fra gli stati psichici e le sue espressioni esterne (a cui si legano recenti studi) possa spiegare la consonanza spirituale; e se, oltre a ciò, sia da ammettere anche un'azione diretta di una psiche sopra un'altra, quale in taluni casi, si presenta come ipotesi spontanea.

§ 7. **Aspetto sociale della realtà.**

Accettiamo le sensazioni (idee, volizioni, ecc.), altrui, come una supposizione fondamentale. Allora il concetto della realtà si allarga; mediante il *consenso*, il criterio di essa, che ci siamo sforzati di afferrare nelle pagine precedenti sotto l'aspetto individuale, acquista un significato *sociale*. Così appunto alla vista di un oggetto guardato si aggiunge la testimonianza che

altri, nelle medesime condizioni lo vede egualmente. Questa testimonianza si traduce infine in un'aggiunta di altre sensazioni diverse, secondo il modo come essa è resa; tuttavia ha un valore particolare, quando sia apprezzata in base ad appropriati criterii, che costituiscono i canoni della *critica storica*.

Non è nostro intendimento di analizzare i principii di codesta critica. Basti rilevare questo: la realtà, concepita come un dato sociale, significa sempre, in definitiva, una rispondenza di sensazioni a condizioni volontariamente disposte.

Rispetto alla società degli uomini, presa nel suo insieme, si allarga il campo delle sensazioni e degli oggetti, cui queste si riferiscono; ma tale varietà non porge più salda prova del reale se non sia più attento il volere.

Ecco perchè vediamo al tempo stesso più difficile e più facile ingannare una società, anzichè un uomo solo; più difficile quando un vivo interesse disponga gli animi ad ascoltare e ad intendere, come accade, p. es., in una società scientifica; più facile se, come in una folla eccitata, manchi la volontà di dubitare e, senza critica, ciascuno accolga la sensazione più lieve dell'altro, a conferma della propria.

§ 8. **Allucinazioni.**

Il consenso sociale si aggiunge al criterio della realtà individuale e rafforza la credenza che vi si collega, in quanto vi è *accordo* fra l'uno e l'altro, almeno nelle condizioni di una critica opportuna. Ma vi è un caso di eccezione che non può essere passato sotto silenzio.

L'esistenza di allucinati turba la nostra fede, non ostante il piccolo numero di questi, soprattutto perchè una inferenza analogica ci mostra possibile di essere colpiti noi stessi da un'allucinazione. Si domanda se in questo caso il criterio che abbiamo considerato come pietra di paragone del reale, sia atto a renderci conto dell'errore cui siamo esposti, o come e perchè esso si trovi in diffetto.

La questione è irta di difficoltà, perchè l'interpretazione eiettiva dei fatti psicologici, che si producono in uno stato patologico dello spirito, solleva dei dubbii difficilmente chiaribili.

Tuttavia si possono distinguere due specie di allucinazioni; quelle più frequenti che si riferiscono soltanto ad un gruppo di sensazioni, e le allucinazioni complete, che sembrano fortunatamente assai rare.

Nel primo caso manca l'accordo fra le sensazioni diverse, e perciò le condizioni del soggetto, relativamente all'oggetto dell'allucinazione, non sono le stesse che corrispondono all'esistenza di un oggetto reale. Dimodochè è agevole giudicare dell'errore dei sensi, quando un'affezione cerebrale non tolga per altre ragioni la possibilità di un giudizio.

Così, p. es., gli alcoolizzati affetti da *delirium tremens* vanno frequente-

mente esposti ad allucinazioni visive; vedono talvolta dei bicchieri di vino, ma, come stendono la mano per afferrarli, si accorgono che non vi è nulla.

Nel *delirio* dovuto alla *cocaina*, le allucinazioni colpiscono il tatto; nei *paranoici* sono piuttosto allucinazioni uditive, che i malati riattaccano alla loro idea delirante, secondo la quale danno una interpretazione della vita, sistematicamente errata.

Ma non si deve dimenticare che le allucinazioni turbano d'ordinario in modo profondo lo spirito del malato, suscitando sentimenti di terrore, di superstizione, di affetto. Per questa circostanza particolare, sembra la maggior parte degli allucinati, soprattutto se *isterici* o *epilettici*, non sieno capaci di fare uno sforzo della volontà fissando l'attenzione sui dati dei varii sensi, il cui confronto dovrebbe dissipare l'inganno nel quale si trovano.

Questa osservazione ci conduce a intravedere come il fatto allucinatorio, ove pure si tratti di allucinazione completa, si possa mettere in rapporto col criterio che applichiamo ordinariamente per giudicare della realtà, per modo che più non appaia un'effettiva eccezione.

Sembra invero che l'allucinazione completa, la quale non è sotto alcun riguardo distinta dalla sensazione complessa rispondente ad un oggetto reale, supponga uno stato mentale in cui la volontà si trova addormentata o quasi spenta. E difatti le allucinazioni complete più caratteristiche si presentano nel *sonno ipnotico*, quando il paziente è completamente soggiogato dalla volontà dell'attore.

Si può dire dunque che manca, in simili casi, la condizione preliminare pel controllo della realtà. Non è possibile *dubitare*, e sottomettere le impressioni mendaci ad una *prova critica disposta dalla volontà*.

Non pretendiamo di avere esaurito così, l'analisi delle questioni riferentisi ai fatti allucinatorii. Questo vasto tema, campo sempre aperto all'investigazione psicologica, esigerebbe uno studio più profondo, che qui non ci è dato intraprendere.

Basti aver accennato alle difficoltà che da questo lato possono sollevarsi contro le conclusioni della nostra critica, riguardo alla definizione positiva della realtà, e avere indicato, al tempo stesso, come codeste difficoltà non sembrino insuperabili.

Se si riesca a provare che l'allucinato, soggiacente ad un'allucinazione completa, non ha la possibilità di *voler* controllare le sue impressioni mendaci (e certe teorie relative ad una spiegazione corticale del fatto autorizzerebbero questa conclusione), il criterio del reale, sopra definito, si troverà inapplicabile in questo caso, ma non si potrà dire contraddetto. Onde verrà rimossa una eccezione che turberebbe le nostre idee riferentisi alla realtà.

§ 9. **Valore biologico della credenza nella realtà.**

Abbiam visto che la credenza in qualcosa di reale implica sempre una supposizione, alla quale si appoggiano le nostre *attese* o *previsioni*.

Il valore pratico di tale supposizione è la norma che ne deriva alla volontà, in quanto essa si proponga il conseguimento di dati scopi.

Sotto questo aspetto ogni discussione intorno alla legittimità del supporre appare oziosa, se non in quanto essa volga sui criterii che possono dare maggior fiducia alle singole previsioni. Nel qual senso l'esperienza ci ammaestra come si possa estendere illimitatamente la cerchia delle prime supposizioni, giungendo a rendere effettive le previsioni più remote.

Fuori di questa esperienza scientifica, una pregiudiziale resta priva di ogni contenuto positivo. Le conclusioni della filosofia scettica o idealistica possono insegnarci soltanto questo, che la supposizione di qualcosa di reale non può essere inferita da altro principio superiore. Ma d'altra parte ciò non le aggiungerebbe nulla, perchè nessun uomo può seriamente metterla in dubbio, cioè regolare le sue azioni come se non partecipasse alla credenza nel reale. Infatti questa credenza è fondamento necessario alla vita stessa: cui non ci è dato di rinunziare, fino a che si viva.

C'è dunque qui un'espressione della nostra attività volitiva, come fu giustamente rilevato dalla scuola empirica inglese.

Si noti però! ciò non significa punto che la credenza suddetta, come è voluta, possa essere disvoluta; poichè si tratta di una condizione primitiva per ogni esercizio del volere, la cui negativa implicherebbe l'assurdo di una volontà intrinsecamente contradditoria, che annulla sè stessa.

Soltanto in casi particolari, la volontà, mossa dal timore o dal desiderio, può influire sulla credenza, inibendo l'applicazione dei criterii coi quali riconosciamo la realtà o non realtà di una cosa; e tale influenza può anche divenire sistematica in certi ordini di questioni, ove la falsa previsione sia più difficilmente smentita. Ma codesti casi non ci toccano. Nel nostro studio, ispirato al solo scopo del vero, eviteremo per quanto sarà possibile, tutte le occasioni in cui la prospettiva di conseguenze, volute o non volute, turbi il sereno giudizio che si addice alla filosofia scientifica.

§ 10. **Il postulato della conoscenza.**

Abbiamo cercato di analizzare il concetto ed il valore della realtà, che risulta chiarito, sotto varii aspetti, nei paragrafi precedenti. Cerchiamo ora di riassumere schematicamente il resultato della critica, enunciando il contenuto della nostra credenza, col seguente postulato:

Vi sono degli aggruppamenti fissi e indipendenti da noi, fra le nostre volizioni effettive o supposte, e le sensazioni che ne conseguono, prese, le une e le altre, in un certo senso astratto; essi corrispondono a ciò che chiamiamo

« reale ». Una cosa reale implica sempre diversi rapporti associativi fra serie di sensazioni, producentisi in condizioni determinate. E in forza di tale molteplicità di rapporti illimitatamente estendibile, la supposizione della realtà si allarga, al di là del mondo che cade immediatamente sotto i nostri sensi; in ispecie, per mezzo della supposizione psicologica, la realtà acquista un significato *sociale* (conformemente alla veduta comtiana).

Il reale risulta definitivo, in tal modo, come un *invariante della corrispondenza fra volizioni e sensazioni*.

La parola « invariante » è stata introdotta prima di tutto nell'*Algebra delle sostituzioni lineari*, ed ha assunto un significato più generale, rispetto ad un qualsiasi *gruppo di trasformazioni*, nelle ricerche geometriche ed analitiche di F. KLEIN, S. LIE, H. POINCARÈ, ecc. Da qualche tempo l'espressione è stata portata, in un senso più largo, nella Scienza, e l'uso ne ricorre di frequente; in ispecie l'OSTWALD discorre della energia come di un invariante, che può essere preso come oggetto di conoscenza allo stesso titolo della *materia*.

Ma la veduta che il reale sia un invariante, deve essere determinata, precisando il *corpo degli elementi* (volizioni e sensazioni), ed il *gruppo o i gruppi di trasformazioni* (di tempo, persona, ecc.), cui questo si riferisce. Tale è l'oggetto della critica precedente, e il senso della *definizione della realtà*, ricercata con essa.

Il postulato che abbiamo enunciato è ugualmente quello della conoscenza volgare, richiesta dalla vita, e della conoscenza propriamente scientifica. Della quale cercheremo ora di chiarire il significato, passando dalla considerazione del fatto bruto, cui si riferivano le osservazioni precedenti, all'analisi di ciò che costituisce un fatto per la Scienza.

Una più larga applicazione del postulato anzidetto, riuscirà quindi, non soltanto ad *estendere* la conoscenza volgare, ma anche a proseguire quella *approssimazione*, che abbiam visto appartenerle. Onde il concetto stesso della realtà risulterà progressivamente precisato.

§ 11. **Fatti bruti e fatti scientifici.**

Chi intende a cogliere le differenze tra il fatto bruto nel senso volgare della parola, ed il fatto scientifico, scorge anzitutto in quest'ultimo un *carattere condizionale* assai più netto.

Veramente abbiamo riconosciuto, che ogni conoscenza racchiude delle condizioni per il riprodursi di sensazioni ad esse coordinate. E questo è vero perfino del fatto che vive, per così dire, individualmente, come accidentalità del passato.

Ma si possono distinguere *condizioni subiettive* e *condizioni obiettive*.

Se pur non si tratta di una separazione rigorosa, è tuttavia opportuno di stabilire una differenza secondo la loro relativa importanza.

La conoscenza volgare si attacca soprattutto alle condizioni subiettive; c'insegna come si deve *guardare* per *vedere*, come occorre *muoversi* per *toccare*, ecc.

Veramente c'è anche in questo caso una comparazione del fatto in vista, colla realtà che lo circonda; ma sembra si dimentichi tutto ciò che non interessa i mezzi di porci nella condizione di produrre le sensazioni attese.

L'opposto avviene nella conoscenza scientifica. Il fatto è concepito, non per riguardo a noi stessi, ma in relazione ai fatti che lo circondano; si dimenticano in questo caso, almeno nell'enunciare il resultato, le condizioni subiettive sotto le quali esso si rivela ai sensi, per riferirsi alle condizioni obiettive del suo sussistere.

Un tal modo di considerare i fatti aggiunge loro qualcosa che la conoscenza volgare lascia nell'ombra. Onde un fatto scientifico cresce, per così dire, di una moltitudine di fatti bruti in esso contenuti; guadagna in *generalità* mentre riassume in se stesso nuovi rapporti più estesi.

§ 12. **Fatti fisici.**

È facile chiarire le osservazioni precedenti con qualche esempio.

Picchiamo con un martello sopra una lastra di rame; ci accorgiamo poi, toccandola, ch'essa si è riscaldata.

Ecco due fatti bruti, i quali ci si presentano l'uno dopo l'altro. La descrizione precisa delle circostanze in cui essi si compiono e delle sensazioni provate, non esce dal dominio della conoscenza volgare. La quale c'insegna come deve essere maneggiato il martello per picchiare, o come è più opportuno di toccare il rame per constatarne il calore. Codeste sono condizioni subiettive, che non entrano invece nella conoscenza scientifica del fatto.

La Scienza non ritiene che questo: « il rame picchiato con un martello si riscalda ». Spariscono dall' enunciato i minuti particolari dell' esperienza compiuta, ma ai due fatti bruti si aggiunge il loro rapporto di successione, concepito come invariabile.

Il fatto scientifico consiste nel suddetto rapporto. C'insegna appunto questo, che « si possono provare le sensazioni attestanti il riscaldamento del rame, ove si compiano, in un modo qualunque, gli atti che ne producono la percussione con un martello ».

Ma se si osserva che altri metalli, o anche altri corpi qualunque, si scaldano colla percussione, e che il riscaldamento ha luogo comunque si adopri, per picchiare, un martello o un altro istrumento qualsiasi, si viene a concepire il fatto in un significato più esteso, enunciando che « i corpi si riscaldano colla percussione ».

Si è così eliminata ogni condizione estranea al vero rapporto costituente il fatto, per ritenere soltanto questo rapporto, il quale acquista quindi un significato più generale. La conoscenza scientifica intesa in codesto modo diviene maggiormente istruttiva. Noi vediamo come oggetto di essa una gerarchia di fatti, salienti per gradi ad una più alta generalità e condizionalità.

Che cosa sia un fatto scientifico, appare il più chiaramente nella Fisica. La caduta dei gravi, la temperatura costante di fusione e d'ebullizione dei corpi, la riflessione, la rifrazione e la polarizzazione della luce, l'induzione elettro-magnetica, porgono altrettanti esempii caratteristici di fatti, generali e condizionati ad un tempo.

Nei quali si palesa un *rapporto invariabile di successione* o di *coesistenza*, secondo che si tratti di fenomeni riguardati nell'aspetto *dinamico* o *statico*.

Altre scienze ci daranno occasione di discutere se altri fatti, che si discostano da questo tipo, vi si lasciano ricondurre.

§ 13. **Fatto e legge.**

Ma prima di volgerci a ciò, importa che ci fermiamo intorno ad una questione di parole, la quale involge una grave controversia filosofica.

I fatti condizionati, di cui sopra abbiamo discorso, si chiamano comunemente « leggi », soprattutto ove il loro enunciato sia semplice e generale.

Il nome « legge » suggerisce alla mente l'idea di un rapporto volontariamente fissato, al quale i fatti, concreti o possibili, *debbano* soddisfare. Questo è appunto il significato politico della parola. E sebbene il savio legislatore si attenga alla massima di ordinare soltanto i rapporti aventi già una base di fatto, si può tuttavia concepire una legge che sia priva di un tale sostrato; così appunto narrasi, il sovrano di un popolo d'oriente avere disposto severe sanzioni pel duello, benchè l'uso ne fosse completamente ignoto ai suoi sudditi.

Come una tale concezione della legge si sia sovrapposta ai rapporti fisici, è facile comprendere. Essa riesce invero perfettamente chiara a chi si rappresenti un caos, dal quale Iddio tragga il mondo attuale, ordinato secondo un disegno prestabilito.

Ma, all'infuori di codesta rappresentazione teologica, resta associata al concetto di una *legge fisica*, l'idea di qualcosa di *necessario*, che *debba* essere all'infuori del verificarsi o meno dei fatti contingenti, di cui essa esprime il rapporto: così, p. es., quando si pensano le leggi geometriche e meccaniche, che pur esprimono alcune proprietà del movimento dei corpi, come indipendenti dall'esistenza di questi.

« Necessità » è una parola, che riceve spesso, dai filosofi, interpreta-

zioni diverse, in rapporto ai più disparati giudizii apprezzativi. Che cosa esprime questa parola?

Anzitutto, ad ogni fatto, in quanto contiene un invariabile rapporto di coesistenza o di successione, si lega un certo *sentimento di necessità*, che attesta impossibile di vietare volontariamente la conseguenza, quando si è voluta la premessa.

Tuttavia il nostro potere sulla realizzazione della premessa è, in un certo senso, tanto più grande quanto più particolare è il fatto. In questo senso i fatti generali si sottraggono maggiormente al dominio della nostra volontà, e ci si presentano quindi accompagnati da un sentimento di necessità più forte.

Ma il sentimento della necessità di un fatto non ha soltanto questo significato, limitativo della nostra volontà. Esso interessa soprattutto la Gnoseologia, in quanto vi si collega l'*illusione* che certe rappresentazioni costruite *a posteriori*, sulla base di osservazioni o esperienze preliminari, abbiano un valore *a priori*, e si estendano quindi illimitatamente al di là del campo cui queste si riferiscono. Importa perciò di rilevare che una siffatta necessità di ordine psicologico, resta sempre un sentimento, il cui valore è puramente subiettivo, cioè che non può essere invocato come prova di sussistenza obiettiva.

La storia della Scienza ne porge documenti espressivi.

Basti citare ad esempio la spiegazione che, innanzi TORRICELLI, si dava, del salire dell'acqua nelle pompe, fatto riguardato come necessario da chi presumeva che la natura avesse orrore del vuoto. Codesta necessità è venuta meno, nonostante il suddetto orrore, quando l'uomo pretese di affaticare la natura, facendole tirare l'acqua al disopra di una diecina di metri!

L'insegnamento che scaturisce da simili esempii, diventa induttivamente chiaro anche per riguardo alle rappresentazioni più generali, quantunque sia da notare qui una forte presunzione, che i concetti coordinatori di molteplici osservazioni elementari, formati per una lunga elaborazione psicologica, sieno bene *adattati* all'insieme dei fatti, almeno in un certo campo. Ancora può dirsi che il valore obiettivo delle conoscenze contenute in tali concetti, può essere stabilito, in ultima analisi, soltanto dall'esperienza; la quale deve in ispecie delimitarne il campo di applicabilità e misurarne il grado di esattezza, mediante un confronto delle previsioni che vi si appoggiano.

Rimandando ai capitoli III, IV, V, per un più largo esame della questione, basti qui concludere, che non possiamo riconoscere un fondamento filosofico alla distinzione tra « fatti » e « leggi », accogliendo la veduta di A. NAVILLE [1], che vi sieno *scienze teorematiche*, le quali, indipendentemente dal contenuto, si volgano ad intrecciare « le canevas de la réalité ».

[1] « Nouvelle classification des Sciences », Paris. Alcan, 1901. Cfr. la critica di G. VAILATI nella Rivista di Biologia generale, luglio 1902.

Una legge « indipendente dal contenuto » è un'astrazione trascendentale, che ripugna allo spirito della nostra critica.

Ritorniamo all'analisi del fatto scientifico, per vedere come taluni fatti, che apparentemente si discostano dal tipo tratto dalla Fisica, vi si lascino riattaccare.

§ 14. **Fatti astronomici.**

Se i fatti scientifici debbono distinguersi dai « fatti bruti » per un grado più alto di condizionalità e di generalità, riesce malagevole il considerare come « scientifiche » talune scoperte, delle quali d'altronde è innegabile l'interesse, aventi come scopo di stabilire la semplice esistenza di oggetti nuovi.

Senza uscire dal campo delle scienze fisiche, l'Astronomia e la Chimica ci porgono in proposito esempii istruttivi.

Si può disconoscere l'importanza della scoperta di un astro, non ancora scorto nei cieli? Eppure una tale scoperta, in quanto si tratti di una stella, della quale vengono stabilite le coordinate, non c'insegna molto di più che le condizioni subiettive per la visione di un oggetto nuovo.

Per comprendere il posto da attribuire a fatti di codesto genere nella Scienza, giova osservare che ogni rapporto obiettivo suppone dei fatti bruti, ai quali si riferisce. La conoscenza scientifica esige dunque un sostrato di conoscenze volgari, che possono esser lasciate senza menzione esplicita, soltanto nel caso in cui esse cadano frequentemente nel dominio comune, in vista della facilità di osservarle. Così appunto il fisico, dato che molteplici oggetti di ferro sono alla sua portata, non ha da occuparsi di farne l'inventario.

Ma quando si tratti di oggetti, che, pel loro piccolo numero o per altre ragioni, offrano qualche difficoltà particolare ad essere percepiti, è interessante per la Scienza il metterli in vista. La ricerca scientifica è costretta in questo caso a compiere, per conto suo, un'operazione preliminare, che in altri casi trova sufficientemente compiuta.

Con questa spiegazione veniamo a dire che la scoperta di un astro nuovo è veramente un resultato importante per l'Astronomia, ma non costituisce ancora una vera conoscenza scientifica (per quanto ciò abbia soltanto un valore di « grado »); che il suo interesse consiste nell'avere allargato il campo dei fatti bruti, i cui rapporti formeranno più propriamente oggetto della Scienza.

Sotto questo aspetto il prezzo di una scoperta di codesto genere viene ridotto alla sua giusta misura; ed appare come esso vada rapidamente diminuendo, quanto più diventi facile l'estendere il campo delle osservazioni, con perfezionati strumenti.

Vi è luogo però ad osservare una distinzione importante fra la scoperta di una stella e quella di un pianeta.

In quest'ultimo si possono riconoscere nel fatto i caratteri del tipo scientifico.

Vediamo, p. es., che cosa HERSCHELL ci abbia insegnato colla scoperta di *Urano*.

Varii osservatori, prima di lui, avevano trovato quest'astro nel campo del loro telescopio, di guisa che esso era stato catalogato più volte fra le stelle fisse. Riattaccandolo al sistema planetario, Herschell ha dovuto seguire il suo movimento attorno al sole, e quindi determinare le condizioni obiettive, sotto le quali si può ripeterne l'osservazione.

Queste condizioni, o se si preferisce, i rapporti di posizione leganti l'astro al sole, costituiscono veramente il fatto nuovo, stabilito colla scoperta del pianeta.

All'epoca, di cui si tratta, aggiungevasi alla scoperta un altro interesse, relativo alla conferma o alla modificazione, che si aveva ragione di aspettarne, della teoria newtoniana.

Gli astronomi, pieni di fiducia nella legge che aveva spiegato così precisamente i fatti noti, videro con immenso stupore il nuovo pianeta sfuggire alle previsioni basate sopra di essa. Bisognava ammettere un'eccezione distruggente la regola, o ricorrere all'ipotesi di un altro pianeta ignoto, che colla sua azione perturbatrice spiegasse l'allontanamento di Urano dall'orbita ellittica.

Quest'idea, proposta da ARAGO, fu assoggettata al calcolo da LE VERRIER. La così detta legge empirica di BODE (la quale si rivelò qui assai inesatta) dette modo di rendere determinato il problema. E la scoperta di *Nettuno*, che, per una fortunata combinazione, si trovò molto vicino al luogo assegnatogli *a priori* da LE VERRIER, fu salutata come un trionfo dell'Astronomia planetaria, in quanto veniva a confermare in modo brillante la realtà dei rapporti semplicissimi, riassunti nella legge di NEWTON.

§ 15. **Fatti chimici.**

Le scienze terrestri offrono pure esempii di fatti, il cui riconoscimento importa soltanto la scoperta di qualche oggetto nuovo.

Sorvolando sopra la Geografia, che non ci suggerisce osservazioni diverse dalle precedenti, vediamo quale significato abbia per la Chimica l'aggiunta di un corpo nuovo al catalogo dei suoi elementi.

Nessun dubbio che questo sia un fatto della più alta importanza. Ma si avrebbe torto di riguardare una tale scoperta come l'acquisto di un semplice fatto bruto, e il suo interesse relativo soltanto al piccolo numero degli elementi noti.

Anzitutto una tale conoscenza esprime che certi corpi non han potuto essere ridotti o decomposti al di là di un certo limite, implica cioè una irri-

ducibilità dell'elemento, rispetto ad un gruppo di reazioni; ma più ancora essa è da riguardare, in un aspetto positivo anzichè negativo, come il sostrato di una serie di rapporti fra i varii composti che contengono l'elemento suddetto.

Quando poi la scoperta sussegua ad una previsione, stabilita in base alla conoscenza di relazioni più estese, essa ci porge la conferma di un fatto più generale, a cui spettano i caratteri del fatto scientifico in un più alto significato. Così può dirsi in parte (tenuto conto della difficoltà di far rientrare nella teoria i corpi recentissimi) della scoperta dello *Scandio*, del *Gallio* e del *Germanio*, venuti a riempire una lacuna nel sistema periodico di MENDELEJEFF.

§ 16. **Fatti delle scienze naturali.**

Si assegna come scopo alle scienze naturali (biologiche), presa la parola nel senso ristretto, di classificare in modo sistematico gli animali e le piante sulla superficie della terra. Può dunque sembrare che si abbia così un intero ramo della Scienza, ove non venga proposto in alcuna guisa di andare oltre il riconoscimento di fatti bruti.

Per mostrare come questo concetto sia falso, si osservi anzitutto che la scoperta di una specie nuova non è mai stata riguardata sotto il medesimo aspetto dal collezionista e dallo scienziato.

A quest'ultimo poco importa di aggiungere un nome al catalogo già così vasto delle specie animali o vegetali; egli cerca invece di determinare, in ciascun caso, l'aggruppamento costante dei caratteri che costituisce il tipo di una specie.

Così un vero naturalista, salvo che non prosegua fini speciali, poco si inquieterà di mettere in luce i minuti particolari di struttura, pei quali un individuo si distingue nella sua specie. E neppure accorderà troppa importanza alla distinzione di varietà o sotto-varietà, moltiplicabili a piacere.

Lo conoscenza di un aggruppamento fisso di caratteri zoologici o botanici, è veramente conoscenza scientifica di un fatto ben condizionato; fra questo ed il fatto fisico vi è soltanto una prevalente considerazione dei rapporti di coesistenza, in confronto ai rapporti di successione.

Del resto si ha ancora una gerarchia di fatti di codesto genere salienti per gradi ad una più alta generalità; così, p. es., dalla descrizione precisa dei sistemi nervosi appartenenti a varie specie di anellidi o d'insetti, si trae la nozione generale di quel sistema, costituito dal cingolo esofageo e dalla catena gangliare, che è il tipo del sistema nervoso, per la maggior parte degli animali invertebrati.

Ma nelle scienze naturali, comunque intese nel senso ristretto della parola, non si studiano soltanto aggruppamenti fissi di caratteri, cioè fatti statici, ma anche veri rapporti di successione, analoghi a quelli di cui si occupa più

spesso la Fisica. E non vi ha dubbio che conoscenze di questo genere abbiano un'importanza notevolissima.

Fatti dinamici s'incontrano già nello studio della Morfologia, pur limitato agli scopi della Sistematica. Così, p. es., nella zoologia, volendo classificare i varii casi di *ermafroditismo insufficiente* (*dicogamia*) si è tratti a considerare, accanto alla dicogamia legata a condizioni anatomiche, quale si presenta nei *Lombrici*, nelle *Sanguisughe* o nelle *Aplisie*, quella legata a condizioni di tempo, cioè dipendente dall'epoca diversa in cui maturano le uova e gli zoospermi (dicogamia *proterogina* delle *salpe*, e dicogamia *proterandra* dei *crostacei isopodi* appartenenti alla famiglia dei *cimotoidi*).

Del resto si può dire, in modo generale, che la classificazione sistematica delle scienze naturali non poggia soltanto sullo studio dell'Anatomia statica, ma anche sull'Anatomia dinamica (esempio la *metamorfosi*), e in particolare sull'Embriologia. Basti ricordare che la più retta distinzione fra animali superiori e piante superiori (*metazoi* e *metafiti*) è data dalla constatazione dello stadio della *gastrula*, nello sviluppo embriogenico dei primi.

Aggiungasi che le scienze naturali non esauriscono il loro compito nella classificazione, sicchè paiono già esorbitare da questo scopo molte ricerche importantissime, inerenti ai varii modi di generazione, anfigonica, partenogenetica, agama, degli animali superiori.

La scoperta della generazione alternante (distinta poi in *metagenesi* ed *etergonia*) destò giustamente un grande interesse fra i naturalisti nella prima metà del secolo passato; ed essa costituisce certo una conoscenza scientifica elevata, che mette in luce varii modi di periodicità nella vita degli animali.

Ed ogni resultato relativo alla generazione, contiene un rapporto di generale interesse, sia che si tratti ad es., della generazione infantile (*neotenia* e *pedogenesi*) o del fenomeno singolare osservato dal CHUN per le *ctenofore*, consistente nel succedersi di due periodi di fecondità interrotti dalla metamorfosi (*dissogonia*).

Infine, sotto l'impulso della teoria dell'evoluzione, le scienze naturali hanno esteso enormemente l'indagine dei rapporti dinamici, proponendosi di ricostruire il processo di trasformazione delle specie.

Con esempii tratti dalla Zoologia, abbiamo cercato di fissare la fisionomia del fatto, che cade nell'ambito delle scienze naturali, considerate secondo il significato ristretto della parola. Ma la visione di codeste scienze rimarrebbe veramente incompleta, se esse non venissero riguardate nel loro legame cogli altri rami delle scienze della vita.

Così, ad es., la separazione che si stabilisce fra la Zoologia sistematica e la Fisiologia degli animali, risponde soltanto alla necessità della

divisione del lavoro, sicchè non si può acquistare un adeguato concetto dell'una, senza aver riguardo all'altra. Giacchè i due ordini di fatti s'intrecciano; una preventiva classificazione agevola la ricerca fisiologica, ed uno studio fisiologico porge nuovi criterii per correggere la classificazione, se anche nel momento attuale criterii di codesto genere vengono un po' lasciati da parte.

Attraverso agli inevitabili ostacoli della diversa tecnica di osservazione e di esperimento, un solo e medesimo ordine di fatti si offre allo sguardo dell'investigatore che studii le scienze della vita, ed in questi, quanto più sale la ricerca scientifica, tanto meglio si ravvisa il tipo che ci è occorso di considerare nella Fisica.

Così, sotto l'impulso dell'allargato concetto, si compie oggi, nella direzione del lavoro biologico, un mutamento profondo, e la scienza si avvia all'indagine di rapporti più generali e condizionati. Promessa di immenso progresso, quando i divisi lavoratori, guardando colla mente al di là dei problemi suggeriti dalla loro tecnica particolare, si uniscano ad uno scopo comune; e dai laboratorii marittimi, ove si adunano folle d'invertebrati ancora poco noti o solo morfologicamente descritti, venga la risposta a tanti problemi della Fisiologia, riferiti ad organi più semplici e più varii!

§ 17. **Fatti storici.**

Fra il tipo del fatto, come è considerato nella Scienza, e quello che appartiene alla Storia, si vuol vedere da taluni una irriducibile differenza, che altri all'opposto tentano di comporre.

Una prima dilucidazione è in ogni caso necessaria: la Storia non è una raccolta di fatti bruti, poichè in essa il singolo avvenimento incidentale acquista un interesse soltanto dal rapporto con altri avvenimenti.

Ma, come già avvertimmo, il rapporto anzidetto può essere ricercato in due sensi diversi: o secondo una *intuizione* propriamente *storica*, o secondo una *intuizione scientifica*. Onde due modi di riguardare la conoscenza del passato, due ordini differenti in cui si può disporne il materiale, rispondendo a scopi che a nostro avviso sono entrambi legittimi. La questione, intorno a cui di recente si è tanto discorso, se la Storia sia Arte o Scienza, sorge appunto dalla differenza di codeste vedute, e non può essere risolta se non da una scelta, la quale implica soltanto l'affermazione di un interesse, e non può affatto escludere la legittimità di un altro interesse, che si può porre accanto al primo, ma non in contrasto con questo.

Or dunque i fatti del passato (soprattutto quelli che concernono la vita sociale umana) possono venire collegati in una sintesi, che miri ad una ricostruzione del momento trascorso, tanto più perfetta, quanto più piena di quelle note particolari che conferiscono al momento stesso, o alle persone che vi agiscono, la loro fisionomia caratteristica. In questo senso si prende come og-

getto una *rappresentazione artistica*, sia per uno scopo puramente contemplativo, sia in vista dell'azione che questa può esercitare sui sentimenti degli uomini.

Nulla abbiamo da obiettare a coloro (come il nostro B. CROCE) che sostengono assere questo il senso proprio della Storia; e ci sembra chiaro che a tale concetto artistico, non osti la domanda della *verità* dei fatti storici; questa appare, sia come una condizione per la possibilità di estendere la rappresentazione proposta senza urtare in contraddizioni, sia come una condizione particolare per l'*interesse* della rappresentazione stessa, cioè come un elemento del suo valore emotivo. Mentre il poeta non conturbato dal dubbio, ascolta la voce che sorge dal fosco carcere del castello estense a Ferrara, narrante di Parisina e di Ugo, lo storico inquieto interroga i documenti, se in essi possa scoprire alcuna traccia che valga a confermare o a negare la leggenda pietosa.

Ma, all'infuori del valore che la ricostruzione storica può avere come Arte, riman posto per la concezione scientifica di una Storia che, abbracciando largamente tutti i fatti del passato (anche quelli, come p. es., i geologici, che escono dal dominio degli uomini), intende a ricercarne i rapporti, nel senso che abilita alla previsione.

Il carattere proprio di tale veduta deve essere chiarito, determinando i limiti e la natura delle previsioni accennate, soprattutto nei riguardi della storia umana. Se, p. es., si tratti di ridurre la Storia ad un puro ufficio di preparazione rispetto a certe scienze, come la Glottologia, o la Economia politica, ecc., o se si voglia convertirla addirittura in una scienza sociologica, che dallo-studio del passato tragga l'oroscopo della società avvenire, i cultori della ricerca storica protesteranno contro questo modo di considerare le cose.

Essi ci diranno, p. es., che il riconoscimento di talune leggi generali, costituenti l'oggetto della Glottologia, non può surrogare lo studio delle condizioni particolari secondo le quali il trasformarsi o lo svilupparsi di un dato linguaggio si è atteggiato in un processo concreto. E, similmente, la cognizione astratta di taluni generali rapporti economici, è ben lungi dal poter prendere il posto della conoscenza storica di un ordine di fatti sociali, in cui pure si ravvisi un'esplicazione di quei rapporti. Ancor meno le leggi sociologiche, dove se ne conceda la sussistenza, potranno insegnarci qualcosa di determinato nei riguardi di un'epoca o di un ambiente, poichè certe connessioni, estremamente generali nello spazio e nel tempo, sono ben lungi dallo stringere dappresso la multiforme realtà.

Se dunque alla Storia si attribuisca un valore scientifico di previsione, non può trattarsi, almeno di regola, di una previsione del futuro storico, sufficientemente determinata.

Ma in altro senso gl'indagatori del passato intendono l'ufficio delle cogni-

zioni, relativamente generali, acquisite mediante il confronto dei documenti, attinenti ad un periodo o ad un ambiente; essi si valgono di queste come di un mezzo interpretativo e correttivo dei documenti stessi, e vengono così abilitati a completare con opportune supposizioni i fatti bruti già acquisiti, e ad intenderli nel loro significato. In tanto dunque la conoscenza storica ha valore scientifico, in quanto vale in un certo senso a prevedere quale possa essere il resultato di indagini che concernono lo stesso passato, in quanto cioè essa è capace di dirigere l'ulteriore ricerca storica.

Qualunque sia lo scopo più remoto (scientifico od artistico) per cui tale ricerca possa venir proseguita, lo scopo di ricostruire progressivamente la realtà del passato, basta già a formare l'oggetto di una Storia intesa come scienza, nella quale il valore di ogni cognizione si misura dalla sua capacità euristica; dove, per conseguenza, il rapporto relativamente generale (entro i limiti di una sufficiente determinazione), interessa più del fatto singolo, ed indipendentemente dagli elementi emotivi che vi si collegano. Così appunto nella storia dell'Architettura si ricercano sistematicamente, sopra i caratteri particolari delle opere individuali, quelli per cui si riconosce e distingue una scuola, sia, p. es., il bizantino o il gotico francese. Così nella storia politica di Roma, sopra gli avvenimenti singolari o alle vicende delle guerre, per cui si passa dalla repubblica all'impero, una analisi approfondita mette in luce tanti fattori di ordine generale che spiegano codesta trasformazione, e, all'infuori del modo particolare, ce la fanno apparire come il resultato di cause d'ordine generale; sia, p. es., il conferimento della cittadinanza romana, estesa ai soci italici nell'89 (console Lucio Cesare), per cui il funzionamento di un regime fondato sulla partecipazione diretta dei cittadini al governo della cosa pubblica, era divenuto impossibile. E nella storia moderna dell'Inghilterra, le fasi graduali dell'evoluzione liberale e democratica, ci appariscono illuminate e spiegate, in confronto alla storia di altri paesi, dalla veduta generale che il popolo e l'aristocrazia assunsero ivi tradizionalmente un atteggiamento concorde, rimpetto al Monarca.

Accanto allo sviluppo artistico, ed indipendentemente da esso, lo sviluppo della Storia nel senso scientifico, progredisce ai giorni nostri, dirigendo la ricerca a rapporti sempre più generali e profondi. L'indagine, oggi sistematicamente proseguita, dei fattori economici, è un'espressione di questa tendenza, per cui al disotto di ciò che è più appariscente, o artisticamente interessante, si cerca di penetrare le cause intime dei fatti, capaci d'illuminarli in una luce nuova, aiutando una più larga ricostruzione del passato.

In questo senso il tipo del fatto storico si riaccosta a quello scientifico: la realtà storica, come la fisica, si estende e si allontana da noi per via di supposizioni, e tende a presentarsi come una catena di rapporti, quasi una serie

di *invarianti delle fonti*, progredienti verso l'astratto, e disposti in un ordine di determinazione.

Ma a chi voglia spingere il parallelismo alle sue ultime conseguenze, si oppone una particolare difficoltà, propria della storia umana, la quale esula invece da altri rami della scienza storica, sia, p. es., dalla Geologia.

Nella ricerca fisica siamo sorretti dalla fiducia di potere estendere progressivamente, senza arresto necessario, il determinismo causale. Codesta veduta non può trasportarsi senz'altro nel campo storico, perchè, ammesso pure il determinismo nel suo più largo significato, non ne segue affatto un *determinismo storico*, nel senso che tutti i fatti della vita sociale umana possano presentarsi come conseguenze di cause sociali, scopribili mediante un'indagine approfondita. Una *spiegazione storica*, in questo senso, può evidentemente urtarsi a circostanze, come la morte di un uomo o il sopravvenire di una tempesta decidente di una battaglia, che, relativamente alla storia della società, sono concepite come accidentali; onde appare inconfutabile la cosidetta *teoria del caso* di COURNOT, che da simili osservazioni trae la veduta di un limite al determinismo storico.

Valutare l'importanza di codesti fatti accidentali, segnare insomma i limiti del determinismo suddetto, sembra, oggi ancora, il grande problema della filosofia della Storia.

§ 18. **Il supposto nella conoscenza scientifica.**

Ci siamo sforzati di riattaccare al tipo del fatto scientifico, quale viene offerto dalla Fisica, taluni ordini di fatti che da esso sembrano più lontani. Ritorniamo ora al tipo stesso, riguardato pure, se si vuole, nella sua espressione più perfetta, allo scopo di svolgere alcune riflessioni di carattere generale.

Anzitutto il fatto scientifico, di cui abbiamo delineato la fisionomia, ci appare in un continuo progresso, saliente per gradi ad una più alta condizione e generalità, e riassumente quindi un maggior numero di fatti bruti.

Ma un'altra circostanza attira la nostra attenzione. Nel progresso suddetto, ci si allontana ognora di più dalla realtà che cade sotto il giudizio immediato dei sensi; il cerchio delle supposizioni si allarga molto al di là di ciò che è richiesto dagli ordinarii bisogni della vita; il dominio della conoscenza si estende ad una moltitudine di fatti, che diventa praticamente impossibile verificare, i quali si tengono tuttavia gli uni cogli altri, come gli anelli di una catena di cui i capi sieno nelle nostre mani.

Soltanto l'abitudine c'impedisce di scorgere quanto vi sia di supposto in taluni fatti, che pur concepiamo come oggetto di una osservazione diretta.

Non si immagina nulla di più evidente, che l'esistenza di un sole costituito da una massa infuocata. Eppure questa affermazione dell'Astronomia suppone tutta una serie di sensazioni non verificabili. Tant'è vero che il fatto,

oggi riguardato come oggetto di osservazione alla portata di tutti, non fu ammesso in epoche di civiltà assai vicine alla nostra. Sicchè il popolo elleno, che pur consideriamo modello di altezza spirituale, sorse contro il filosofo che, materializzando mostruosamente il Dio Apollo, osò vedere nel sole un corpo infiammato *più grande del Peloponneso!*

Esaminiamo il significato delle supposizioni contenute nella conoscenza scientifica.

Supporre un fatto significa:

1) attendere (o prevedere) date sensazioni in certe condizioni future;

2) porre fra i gruppi di sensazioni attuali o disponibili, un aggruppamento intermediario, che valga ad associarli in un dato ordine di previsione.

Il primo significato è relativo al campo delle *esperienze* che si concepiscono come *possibili*. Fissare i limiti di questo campo è una questione delicata, e dipendente, in parte almeno, dallo stato delle conoscenze, perchè certe condizioni difficili, che oggi sembra impossibile disporre, potrebbero essere realizzate domani.

Tuttavia, indipendentemente dalla possibilità *concreta*, si ammettono, come *idealmente* possibili, le supposizioni che implicano una *semplice estensione* delle *condizioni* in cui l'esperimento può attualmente compiersi, o delle *sensazioni note* che ad esso corrispondono. Così appunto si parla di *fatti lontani*, simili a quelli che constatiamo vicini, e di oggetti *molto grandi* o *molto piccoli*, dove i dati sensibili si suppongono soltanto moltiplicati o divisi, senza che ne sia snaturato il carattere proprio; certi istrumenti, come il telescopio o il microscopio, ecc., conferiscono un significato concreto alla estensione delle sensazioni suddette.

Relativamente al secondo significato, la possibilità di supporre non è in alcun modo limitata dalla impossibilità di realizzare le condizioni richieste; alla verifica *diretta* subentra allora una verifica *indiretta* illimitatamente proseguibile; ed in questa proseguibilità è un carattere delle *supposizioni di fatto*, cui corrisponde una rappresentazione integrale sotto ogni rapporto, senza arresto necessario.

Soltanto nel processo di acquisto della conoscenza, e non nella Scienza positiva formata, vi sarà luogo di considerare, accanto a queste, altre supposizioni (*rappresentative*), dove le condizioni e sensazioni associate sono non soltanto estese al di là dei limiti pratici attuali, ma anche *snaturate*, per modo che esse implichino un'astrazione necessaria da alcuni dati che l'esperimento fornisce in casi simili, e quindi un arresto nella rappresentazione del fatto supposto. Pertanto, gli oggetti che a queste corrispondono, non potranno più essere pensati come *reali*, ma soltanto come enti *fittizii*, che adempiono l'ufficio

di un intermediario (non bene determinato) fra i fatti; così, p. es., le *immagini* dell'atomo, dell'etere, ecc.

§ 19. **Valore delle conoscenze scientifiche.**

Un'altra riflessione di carattere generale, concerne la questione che si è affacciata più volte, almeno come implicita, nella analisi del « fatto », cioè quella del *valore* delle conoscenze scientifiche.

Una critica approfondita intorno a ciò escirebbe necessariamente dal dominio della Scienza, perchè il fatto scientifico presentandosi finalmente come una somma di fatti bruti, il suo interesse si palesa pur relativo all'interesse di questi, ed è quindi materia di *giudizii apprezzativi*, che possono venire subordinati a criterii diversi, in rapporto a fini diversamente voluti.

Ma, entro i limiti della Scienza cade il giudizio che intende a valutare i rapporti generali ed astratti, misurandone la capacità a cogliere e rappresentare i fatti, le loro *somiglianze* e *differenze*, in un ordine già dato come interessante, cioè in relazione allo scopo conoscitivo. Sotto tale aspetto il *numero* dei fatti bruti associati in un fatto scientifico, ossia la generalità di questo, non ne costituisce l'unico elemento di valore; accanto ad esso è da mettere in conto un elemento subiettivo, cioè il *modo di associazione* dei fatti bruti medesimi, cui si collega la facilità della previsione concreta, la possibilità dell'ulteriore progresso scientifico.

§ 20. **Conoscenza per concetti.**

Riguardiamo più da vicino codesto aspetto subiettivo delle conoscenze scientifiche.

Mentre cresce in esse il contenuto reale di fatti, che vengono per così dire sommati negli invarianti più generali, la forma della previsione progredisce e si adatta alla varietà dei casi, acquistando una crescente indeterminazione.

Perciò i rapporti generali, presi da soli, non costituiscono integralmente « somme di fatti bruti »; c'è in essi, come già vedemmo, un'*astrazione* o eliminazione di dati. Il fatto scientifico riveste la forma di un *fatto semplificato, tipo di una serie di fatti possibili*; e la previsione concreta si effettua aggiungendo al tipo la conoscenza degli *elementi* riguardati come *accidentali*, che distinguono e fissano un fatto reale nella serie stessa.

Ora questo tipo prende il nome di *concetto*, e si può dire quindi che *la conoscenza scientifica tende ad effettuarsi per mezzo di concetti*; nel quale enunciato si ravvisa una veduta della più alta importanza, che può già riattaccarsi ad ARISTOTELE, e che KANT ha posto a fondamento della sua « Logica trascendentale »; ma da cui sembra ognora possibile dedurre nuove e feconde conseguenze, in rapporto alla teoria della Scienza.

Rappresentare i fatti per mezzo di concetti, significa, come abbiam detto, associare ed astrarre, quindi riunire i dati bruti, poi separarli, *scegliendo* ciò che diverrà elemento *essenziale* costitutivo del concetto, lasciando da parte gli elementi *accidentali*.

Una scelta analoga si riscontra già, come notammo (§ 5), nella conoscenza volgare, e si può dire che fa parte della disposizione volontaria di sensazioni rispondente al fatto conosciuto. Il parallelismo si lascia proseguire; infatti la *supposizione di un concetto* costituisce come la *premessa volontaria* del fatto scientifico, in quanto implica una scelta di dati e quindi una *disposizione di esperienze*.

L'importanza di questo elemento volontario viene messa in evidenza ove si ~~confrontino~~ *diversi concetti* capaci di subordinare ugualmente un certo insieme di esperienze, poichè ne risulta allora una certa *arbitrarietà* della conoscenza scientifica, la quale può valutarsi appunto in ordine alla *facilità della previsione* ed al suo *incremento estensivo*.

Ma la discussione di tali questioni implica di considerare la Scienza, non più come formata, bensì nel suo progressivo sviluppo, dove in luogo dell'accettazione di *fatti acquisiti* si hanno *ipotesi e teorie*.

Procediamo dunque a trattare dell'acquisto delle conoscenze, accennando dapprima alla posizione storica del problema, e mostrando poi come la soluzione di esso si riattacchi alla dottrina della conoscenza per concetti, sopra enunciata.

§ 21. **Empirismo e razionalismo.**

L'esame critico della conoscenza che, incominciando dal dubbio, giunge ad una fede sempre più sicura e soddisfacente, ci conduce a parlare dei mezzi dell'investigazione scientifica. Sono l'*osservazione*, l'*esperienza* e il *ragionamento*.

Senza addentrarci in una particolare disamina, basti dire che i due primi vengono spesso contrapposti al procedimento razionale. La controversia fra l'*empirismo* e il *razionalismo* sorge appunto da questo falso modo di rappresentarsi le cose.

Ma essa è chiusa ormai per chi abbia compreso il posto che occupano i diversi metodi dell'investigazione nella Scienza moderna. Ed è notevole come ad uno stesso resultato sieno venuti per vie diverse, spiriti diversamente educati. Felice particolarmente ci sembra il modo come CLAUDE BERNARD tratta la questione, nella sua classica « Introduction à la Médécine expérimentale ».

Ormai la pretesa di penetrare col ragionamento i segreti dell'universo, che si troverebbero misteriosamente rivelati nelle leggi del nostro spirito, va relegata fra le chimere.

Ma da un altro lato si scorge come ogni osservazione ed ogni esperienza abbia valore scientifico solo in quanto si appoggi ad un ragionamento; altrimenti ci si riduce ad attendere che la natura sia così gentile da istruirci, rispondendo per caso a domande che non sappiamo rivolgere nè interpretare.

Del resto basta ricordare come abbiam visto allargarsi il cerchio delle supposizioni, che entrano a costituire sempre di più il dominio della realtà scientifica, per scorgere quanto siamo lontani da quell'empirismo ristretto, che, secondo le massime di S. TOMMASO apostolo, accorderebbe credito soltanto alle sensazioni immediate.

Il processo dell'investigazione ci appare oggi come un'operazione dello spirito, che muovendo dalle sensazioni vi ritorna per mezzo di un ragionamento, più o meno lungo.

Le differenti tappe di questa operazione vengono similmente descritte da varii autori, p. es., dal BERNARD e dallo STANLEY JEVONS, il quale distingue l'*osservazione preliminare*, l'*ipotesi*, la *deduzione* e la *verificazione*. Quest'ultima può essere ugualmente un'osservazione o un'esperienza, secondo che si tratti soltanto di *attendere* sensazioni previste, o invece di *produrle*, cagionando volontariamente un cambiamento nei fenomeni che sono oggetto di studio.

§ 22. **Acquisto delle conoscenze.**

L'analisi di JEVONS è irrefutabile sotto l'aspetto logico, e segnatamente per ciò che concerne il posto attribuito nella Scienza all'ipotesi; della quale E. NAVILLE, in una interessante monografia su « La logique de l' hypothèse », ha messo in luce come i più chiari intelletti scientifici e filosofici, abbiano riconosciuto l'importanza.

Tuttavia, nella pratica del ragionare, l'ipotesi viene spesso sottintesa, sicchè l'aspetto del procedimento messo effettivamente in opera nell'acquisto delle conoscenze, si allontana dallo schema logico sopra definito. E, ad ogni modo, il suddetto schema non rende conto del sorgere dell'ipotesi, fatto psicologico che si riguarda come pertinente alle qualità divinatrici del genio.

Richiamiamo un esempio citato da Jevons : TORRICELLI scopre la pressione atmosferica partendo dall'osservazione che l'acqua sale nelle pompe fino all'altezza di una diecina di metri, e giungendo col ragionamento alla esperienza del barometro.

Qui l'ipotesi è nettamente concepita avanti l'esperienza. Ma in altri casi, forse più frequenti, essa rimane nascosta ed è difficile a mettere in luce.

Si ricordi, p. es., il ragionamento che ha permesso a GALILEO di antivedere il resultato sperimentale che i gravi cadono al suolo con uguale velocità, distruggendo l'erronea supposizione di una velocità proporzionata alla massa. Galileo immagina due masse simili, cadenti l'una accanto all'altra : esse acquisteranno velocità uguali. Uniamo, egli dice, le due masse; l'una

non potrà accrescere la velocità dell'altra, sicchè la massa unica, somma delle due, si muoverà ancora colla velocità medesima.

L'esperienza che verificò codesto resultato, fu agli occhi di Galileo una semplice conferma, della quale forse per suo conto non credeva avere bisogno, poichè il semplice ragionamento riferito gliene dava la certezza *a priori*.

Ma il suddetto ragionamento suppone che la caduta dei gravi avvenga per effetto di una forza, la quale agisca su ciascun corpo come se fosse isolato da tutti gli altri; e questa ipotesi equivale sostanzialmente al fatto stesso che si vuol dimostrare, generalizzato. Essa sembra tuttavia la più conforme al concetto della causa, ricavato dalla natura inorganica, ove le cause si sommano generalmente senza reciproca azione.

Si porti invece lo stesso ragionamento nell'ambito della vita! Si applichi, p. es., come si credette legittimo di fare, nell'ordine dei fenomeni psicologici. Si sarà condotti così a concepire la volontà e l'azione di una folla come la semplice resultante dei motivi agenti sugli individui che la compongono, e si perverrà quindi a stabilire delle previsioni smentite dalla esperienza. Poichè il concetto anzidetto della causalità non si accorda qui coi fatti, siccome viene chiaramente dimostrato dai recenti studi di Psicologia collettiva.

La teoria, secondo la quale la conoscenza tende ad effettuarsi per mezzo di concetti è propria a sciogliere le difficoltà gnoseologiche sopra accennate.

Poichè in realtà la tappa del ragionamento induttivo che precede la deduzione, non è l'ipotesi enunciata per una misteriosa divinazione dei fatti, ma il concetto, mediante il quale i fatti stessi si suppongono rappresentati, sorgente dalle osservazioni preliminari per un lavoro (spesso inconscio) di associazione e d'astrazione. Ogni concetto, così formato, contiene delle ipotesi, ma queste debbono essere rese esplicite da una critica, che enunci i resultati della visione immaginativa riferentesi ad esso.

Nel primo esempio citato, TORRICELLI ha subordinato il fatto della salita dell'acqua nelle pompe al concetto dell'equilibrio di due fluidi in vasi comunicanti, il quale suppone una misura della pressione, esercitata da uno dei fluidi sull'unità di superficie proporzionalmente all'altezza e alla densità dell'altro.

Nel secondo esempio come abbiamo già rilevato, GALILEO ha subordinato la sua ipotesi al concetto generale di una forza provocante la caduta dei corpi, la quale agisca su di essi, indipendentemente dai loro legami.

Contrapponiamo dunque allo schema logico di JEVONS uno schema psicologico del ragionamento induttivo comprendente i quattro stadi dell'*osservazione preliminare*, del *concetto che ipoteticamente la rappresenta*, della *deduzione* e della *verificazione*.

Ci avviciniamo così a cogliere nella sua realtà il procedimento di acquisto delle conoscenze, e a spiegarci le misteriose facoltà del genio, a cui si attribuisce il potere divino dell'antiveggenza. Ed invero riesce comprensibile che uno studio dell'origine dei concetti possa mostrare come una sensibilità più squisita ed una associazione più estesa permettano di trarre, da un piccolo numero di osservazioni, concetti formati in guisa da rappresentare adeguatamente i fatti. Mentre, d'altra parte, la rivelazione che una prima parte del ragionamento si compie spesso per un lavoro incosciente, ci richiama a considerare le molteplici cause d'errore che a codeste previsioni si accompagnano.

E qui si noti che le nuove *teorie degenerative del genio* (intorno a cui non abbiamo competenza per pronuziarci) non appariscono in contrasto col concetto delle facoltà geniali sopra accennato, quante volte si mostri che la iperestesia di certe vie associative del cervello vada legata ad una più bassa tonalità di altre funzioni cerebrali.

§ 23. **Teorie scientifiche.**

Il procedimento innanzi descritto, mentre si compie sotto l'aspetto obiettivo nella conoscenza del *fatto scientifico*, si presenta nella sua formazione subiettiva come una *teoria*. Il nome di teoria scientifica spetta dunque ad ogni concetto o sistema di concetti, sorto per induzione da osservazioni preliminari, cui, mediante uno sviluppo deduttivo, vengano subordinati dei fatti supposti, più o meno perfettamente verificati.

Accade per altro che le fasi induttiva e deduttiva, s'intreccino nello sviluppo effettivo, per modo che la riduzione di una teoria al procedimento innanzi descritto riesca soltanto possibile se questa si spezzi in una serie di teorie concatenate fra loro, dove le conseguenze dell'una vengano accettate come premesse della successiva, al posto di osservazioni preliminari.

§ 24. **Teoria della gravitazione.**

Riferiamoci ad un esempio classico, sforzandoci di ricostruire psicologicamente l'acquisto della teoria newtoniana della gravitazione.

Le osservazioni astronomiche preliminari, completate per interpolazione, trovansi espresse dalle leggi di KEPLERO seguenti:

1) i pianeti descrivono orbite ellittiche, di cui il sole occupa uno dei fuochi;

2) le aree descritte dai raggi vettori sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle;

3) i quadrati dei tempi periodici sono proporzionali ai cubi degli assi maggiori.

Le medesime leggi si applicano al movimento relativo dei satelliti di Giove

e degli altri pianeti, salvo che la terra si riferisce solo al caso di più satelliti; in ispecie le prime due leggi valgono anche pel moto della luna intorno alla terra.

Il primo passo dell'analisi di NEWTON consiste semplicemente nel surrogare al concetto kepleriano di un sistema di orbite ellittiche, con un dato fuoco, il concetto di un centro attrattivo intorno a cui si muovono i pianeti (o i satelliti di un pianeta) riguardati come punti. E l'idea è evidentemente suggerita da una grandiosa associazione, per cui il pensiero ricorre ai casi studiati da HUIGHENS, dove il moto di un punto, che gira in un'orbita chiusa, importa una forza attrattiva centripeta rivolta verso l' interno, che compensi la forza centrifuga. Nel caso di un punto, legato con un filo ad un centro, il quale descriva un cerchio con velocità uniforme, la forza attrattiva (misurata dalla tensione del filo) è anzi rivolta verso il centro suddetto, e la sua misura è inversamente proporzionale al quadrato del raggio.

Ora questo è un esempio particolare in cui trovansi soddisfatte le prime due leggi di Keplero. Una deduzione ben nota conduce (con Huighens) ad estendere la conclusione al caso generale: un punto che si muova attorno ad un centro, in un'orbita chiusa, per modo da soddisfare alla seconda legge kepleriana, ha un'accelerazione rivolta verso quel centro; e se l'orbita è un ellisse ed il centro di rotazione è un fuoco, l'accelerazione risulta inversamente proporzionale al quadrato del raggio vettore.

Il movimento si può quindi spiegare ammettendo una forza attrattiva, inversamente proporzionale al quadrato della distanza, che emani dal centro e si aggiunga ad un dato impulso iniziale ricevuto in un certo istante dal mobile in guisa da soddisfare ad una certa diseguaglianza.

Si è guadagnato intanto questo, di spezzare l'ipotesi kepleriana in due altre: forza attrattiva, ed impulso iniziale soddisfacente ad una certa diseguaglianza. Lasciamo cadere quest'ultima condizione; avremo allora possibili movimenti in orbite iperboliche e paraboliche, che rientrano nel concetto newtoniano, e si presentano come una diretta generalizzazione dei moti dei pianeti intorno al sole. I movimenti in orbite quasi paraboliche (e forse anche iperboliche) trovansi approssimativamente realizzati dalle comete. Ed alle comete si sono recentemente riavvicinate le stelle filanti (SCHIAPPARELLI).

Prescindiamo da questa estensione, supponendo che le due leggi kepleriane sieno enunciate con una generalità un po' maggiore dell'ordinario; ed aggiungiamo la terza legge, che porta l'attrazione esercitata dal sole sui pianeti, e così da Giove sui satelliti, proporzionale alle masse attratte. Si può dire con ciò che i concetti, mediante i quali si traducono i fatti nelle teorie di Newton e di Keplero, sieno equivalenti?

Certo, se si arresta lo sviluppo della teoria newtoniana alla trasformazione logica delle ipotesi kepleriane, l'equivalenza deve essere perfetta. Nulla

di più, e soprattutto nulla di diverso in contraddizione colle premesse, potrà uscirne.

Ma il valore della trasformazione sta nella circostanza che al concetto newtoniano :

1) vengono subordinati altri fatti, oltre quelli astronomici contemplati primitivamente;

2) si associa una nuova intuizione di rapporti che, in virtù di talune analogie e di una certa semplicità e simmetria di rappresentazione, suggerisce *ipotesi nuove*, correggenti quelle da cui si sono prese le mosse.

La leggenda narra come la caduta di un pomo richiamasse Newton a riavvicinare il moto dei corpi cadenti alla superficie della terra con quello della luna. Se l'attrazione della terra si esercita non soltanto sulla luna, ma su tutti i corpi, in ragione inversa al quadrato della loro distanza, diguisachè l'ordinaria gravità vi rientri come un caso particolare, deve esser possibile di dedurre il valore della costante g di GALILEO (l'accelerazione dovuta alla gravità) dall'accelerazione della luna, immaginando questa trasportata alla superficie della terra. Il calcolo si effettua, in una prima approssimazione, moltiplicando l'accelerazione lunare per 60^2, attesochè la distanza media della luna dalla terra sia 60 volte il raggio terrestre; e così appunto si ritrova, già assai bene, il valore della costante g!

A questo punto le ipotesi nuove, correttrici del sistema kepleriano, sorgono dalla rappresentazione ottenuta dei fatti, in virtù di associazioni suggestive.

Il sole attira i pianeti, i pianeti attirano i satelliti; in particolare la terra attira la luna, e l'attrazione si esercita non sulla luna soltanto, ma su tutti i corpi che circondano la terra, e si rivela alla superficie di questa come gravità. Il passo da fare è un semplice allargamento delle ipotesi; anzitutto : l'attrazione si esercita da ciascuno dei corpi celesti su tutti gli altri, sempre proporzionalmente al prodotto delle masse e in ragione inversa al quadrato delle distanze.

Questa estensione, oltrechè dal rimuovere limitazioni di cui non si vede *a priori* il motivo, nasce già in parte dal proseguire l'analogia col movimento di un punto legato ad un centro, dove all'azione centripeta corrisponde una reazione centrifuga uguale ed opposta. Prima di tutto Newton fu tratto a porre in generale il principio d'azione e reazione e ne dedusse tosto che l'attrazione si esercita anche dai pianeti sul sole; ciò non importa ancora una vera correzione delle leggi kepleriane, finchè esse si considerino come espressione del moto relativo. Ora perchè la stessa attrazione non si eserciterebbe anche dai pianeti gli uni sugli altri? Se l'effetto di codesta attrazione fosse molto notevole, le leggi di Keplero sarebbero visibilmente false; ma poichè si tratta di *perturbazioni* assai piccole, durante tempi non troppo lunghi, è possibile

ammettere che le ipotesi di Keplero rappresentino soltanto una prima approssimazione, e che, adottando l'ipotesi dell'attrazione estesa, si possa ottenere una approssimazione più precisa.

Tutti sanno che così accade difatti, e già abbiamo avuto occasione di ricordare, fra le verifiche della teoria newtoniana, la brillante scoperta di *Nettuno*.

L'ultimo passo consiste nell'estendere l'ipotesi d'attrazione a corpi materiali qualsiansi; l'attrazione dei corpi celesti viene allora riguardata non come una forza emanante dai loro baricentri, ma come una resultante di forze pertinenti alle loro particelle.

Ecco un fatto supposto interamente nuovo, che ha trovato conferma diretta nelle esperienze di CAWENDISCH, proseguite e perfezionate da numerosi sperimentatori: si aggiungono le indirette conferme di AIRY, misurante la variazione della gravità nelle viscere della terra, di CARLINI, che ha valutato l'influenza esercitata sulla gravità da prossime montagne, ecc. Nel campo astronomico l'ipotesi così estesa conduce d'altronde ad una correzione della teoria, dove si tenga conto della *forma* dei corpi celesti; in ispecie allo schiacciamento della terra ai poli corrisponde una effettiva perturbazione caratteristica del moto lunare, la quale fu determinata da LAPLACE.

La teoria, che ha preso nome della gravitazione universale, mentre risolve il problema del moto nel sistema planetario, con un grado d'esattezza non superato da alcuna teoria fisica [1], si allarga, con meraviglioso progresso, in più direzioni.

I movimenti relativi delle *stelle doppie*, osservate da HERSCHELL in poi nelle più lontane regioni dei cieli, si adattano alla spiegazione newtoniana [2]. La *forma* dei corpi celesti, ed in ispecie quella della terra, riesce pure spiegata sufficientemente in base all'attrazione delle varie parti, ammesso uno stato fluido originario del corpo (ellissoidi di MAUCLARIN); l'ipotesi di CLAIRAUT che la densità della terra varii per ellissoidi concentrici, conduce anche ad apprezzare *a priori* quantitativamente lo schiacciamento dell'asse polare della terra, e si trova il numero

$$E = \frac{1}{292,4},$$

[1] Cfr. in ispecie l'ultimo capitolo del « Traité de Mécanique céleste » di TISSERAND (Gauthier et Villars, Paris, 1889-1896)

[2] Cfr. in particolare le note di DARBOUX e HALPHEN nei Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t 84.

che è in buon accordo col resultato delle misure geodetiche, le quali danno (secondo CLARKE)

$$E = \frac{1}{293,5}.$$

Si aggiunga, sulla terra, la determinazione delle maree, che già Newton aveva riattaccate all'attrazione lunare, e da cui Laplace ha tratto previsioni concrete, utili ai marinai.

Dove si arresterà questo sviluppo?

I fenomeni di *adesione* e di *capillarità*, mostrano che a distanze molto piccole si esercitano azioni più forti della newtoniana. Si è condotti quindi ad una nuova estensione dell'ipotesi: forze centrali dipendenti dalle distanze secondo uno sviluppo in serie di potenze negative; i termini dello sviluppo, oltre la potenza — 2, sarebbero trascurabii, allorchè si tratta di distanze sensibili.

Non c'inoltriamo a discutere le questioni che qui prenderebbero origine, rimandando per alcune di esse al cap. VI.

Ma vogliamo notare soltanto questo, che: l'ipotesi newtoniana e quella più generale accennata, presentandosi come *equivalenti*, nell'ordine delle approssimazioni astronomiche, rimane qui una libera scelta, la quale conduce ad adottare la prima formula, come *istrumento di previsione più facile*, entro il campo dell'Astronomia.

§ 25. **Critica delle teorie.**

L'esempio della teoria newtoniana, considerata nei suoi successivi stadii di sviluppo, illustra in particolare le seguenti circostanze:

1) La formazione dei concetti, ed il conseguente sviluppo delle ipotesi, dall'associazione di osservazioni diverse.

2) L'astrazione da taluni dati e quindi la progrediente indeterminazione delle teorie. Invero nel passaggio dalle leggi kepleriane alla legge newtoniana si eliminano prima di tutto certe costanti accidentali (posizioni e velocità iniziali) che vengono determinate, pei varii casi, dalle osservazioni verificatrici.

3) La subordinazione di nuovi rapporti ad una teoria generale mediante *ipotesi ausiliarie*.

4) L'*equivalenza* di diversi sistemi di concetti rispetto ad un certo gruppo di fatti rappresentati, e lo sviluppo da codesti concetti di *ipotesi diverse in un ordine più esteso di rapporti*.

5) L'*equivalenza di ipotesi diverse* relativamente ad una serie di osservazioni ed esperienze, prese *in un certo ordine di approssimazione*.

Dalle circostanze 4) e 5) scaturiscono diversi modi di *semplificare le*

teorie entro un certo campo di previsione; e nel secondo caso la semplificazione è suscettibile di un apprezzamento quantitativo preciso.

Ora il processo di formazione dei concetti si può allargare enormemente, aggiungendo agli oggetti reali degli *enti fittizii* (cfr. § 18), a fine di spingere più innanzi certe associazioni, e di aiutarne la visione immaginativa.

A tale finzione non si può porre *a priori* limite alcuno, ma deve esigersi che, allo sviluppo delle teorie in questo senso, corrisponda una critica opportuna.

La conoscenza teorica così proseguita, non si riferisce più ad un insieme di rapporti reali, verificabili dall'esperienza; accanto al mondo *fisico* di questa, essa crea un mondo immaginario, *metafisico*, al di là di ogni esperimento possibile, e pensa l'uno e l'altro come due parti non distinte (se pure l'una *visibile* e l'altra *invisibile*) di una medesima realtà. Ora spetta alla critica di scernere le ipotesi e le conseguenze che si riferiscono a codeste due parti; infine soltanto ciò che si riferisce alla prima ha un *senso reale*, cioè costituisce una conoscenza effettiva; mentre, ciò che vi è di immaginario nella teoria deve essere pensato soltanto come un *mezzo di acquisto* della conoscenza. Codesto mezzo è efficace appunto perchè il sistema delle immagini si concatena con quello dei fatti, ma a tale efficacia corrisponde la difficoltà di valutare gli acquisti ottenuti. Pertanto la critica di una teoria dovrà condurre ad una trasformazione delle *ipotesi rappresentative* adottate, in guisa da separare le *ipotesi fisiche* in esse contenute, dalle *ipotesi* (metafisiche) *indifferenti* che si riferiscono soltanto agli enti fittizii, ed importano *rappresentazioni diverse, ma equivalenti, di un certo gruppo di fatti.*

Qui è opportuno rilevare subito che l'equivalenza di due sistemi d'ipotesi rappresentative, rispetto alla realtà, dipende dai legami che si pongono idealmente fra gli oggetti fisici e gli enti fittizii, e perciò *le ipotesi indifferenti possono acquistare un significato fisico in una estensione della teoria*, che subordini allo stesso sistema di immagini un gruppo più ampio di fatti.

Procediamo ad illustrare le cose dette con alcuni esempii.

§ 26. **Teoria elettrostatica di Poisson.**

È noto come POISSON sia riuscito a subordinare i fenomeni della elettricità statica ad una teoria, intimamente legata alla teoria newtoniana.

La parola *elettricità* risveglia la sensazione di una particolare scossa nervosa, la quale si accompagna ai fenomeni della scarica elettrica (scintilla, ecc.).

Osservando le circostanze che precedono o determinano codesto fatto, si constata l'esistenza di attrazioni e repulsioni fra i corpi posti in certe condizioni (elettrizzati), dove si tratta in ogni caso di forze di ordine superiore rispetto a quelle della gravitazione.

I fenomeni dell'attrazione e della scarica elettrica si accordano colla rappresentazione di *fluidi attraentisi* trattenuti dai corpi elettrizzati, i quali, al di là di un certo limite, vincano la resistenza opposta dai corpi stessi alla loro uscita. Per spiegare le due specie di azione, attrattiva e repulsiva, Poisson ha immaginato *due fluidi*: *l'elettricità positiva* e *l'elettricità negativa*.

Le ipotesi rappresentative si possono enunciare come segue:

1) Esistono nei corpi due fluidi elettrici, *positivo* e *negativo*, che in determinate condizioni (*fenomeni statici*) sono trattenuti nei corpi stessi, posti in un mezzo coibente, p. es., nel vuoto.

2) Vi sono corpi *buoni conduttori* e *cattivi conduttori* (*coibenti*); nei primi la distribuzione dei fluidi elettrici raggiunge quasi istantaneamente uno stato d'equilibrio, indipendente dal modo di caricamento e dipendente soltanto dalla forma del corpo e dalla quantità del fluido contenutovi; nei secondi i fluidi elettrici circolano lentissimamente e possono quindi ritenersi trattenuti dalle particelle della materia.

3) In ogni conduttore *non elettrizzato* vi sono quantità o *masse uguali* dei due fluidi (che si *neutralizzano*). In un conduttore elettrizzato vi è un eccesso dell'uno sull'altro.

4) Fluidi dello stesso nome si attraggono, fluidi di nome contrario si respingono, e l'azione è (per due elementi) proporzionale al prodotto delle masse.

5) L'azione attrattiva e repulsiva dei fluidi è, per due elementi di volume, in ragione inversa al quadrato della distanza.

Queste ipotesi si presentano in parte come relazioni dei fluidi fittizii fra loro, in parte come relazioni di questi coi corpi; ma è facile il ricavarne *ipotesi fisiche*, esprimenti taluni fatti elementari.

Così infatti la 1) rappresenta anzitutto la permanenza dello stato elettrico; la 2) certe circostanze fondamentali della elettrizzazione per contatto o per induzione; la 5) traduce la *legge di* COULOMB, e la 3) e 4) esprimono le altre condizioni sperimentali dell'azione elettrica:

a) la riunione di due corpi elementari elettrizzati esercita un'azione uguale alla somma algebrica di questi;

b) se due corpi elementari elettrizzati vengono posti a contatto e poi nuovamente disgiunti, di tanto aumenta algebricamente l'azione attrattiva dell'uno di quanto diminuisce quella dell'altro.

Rimane di più nelle predette ipotesi 3) e 4) l'*ipotesi indifferente* che: l'azione del fluido positivo sia uguale e contraria a quella del negativo *a parità di massa*. Invero, mancando un effettivo modo di confrontare direttamente le masse dei due fluidi, il rapporto delle masse che si neutralizzano può prendersi come una costante arbitraria, attribuendole un valore diverso dall'unità.

Dopo l'accennata traduzione, che cosa rimane di più nell'ipotesi rappre-

sentativa fondamentale? quali conseguenze fisiche importa ancora l'esistenza fittizia dei fluidi elettrici?

Il valore dell'ipotesi anzidetta non è bene determinato, finchè non si prestino ai fluidi immaginari alcune proprietà dei fluidi reali; ed è chiaro che a priori non vi è alcun limite alla determinazione in questo senso del sistema di immagini. Si applichino ai fluidi elettrici i principii della Meccanica, e (ad es. con GAUSS) si supponga quindi che:

6) la condizione d'equilibrio s'esprima rendendo massimo o minimo il potenziale delle masse elettriche sopra se stesse.

Il calcolo permette allora di determinare la *distribuzione* del fluido in un conduttore elettrizzato. La conseguenza è che:

L'elettricità si distribuisce in un conduttore soltanto sopra la superficie e non nell'interno, e la distribuzione superficiale dipende, in un modo analiticamente ben definito, dalla quantità d'elettricità (massa) e dalla forma della superficie anzidetta. Questo *teorema di distribuzione* costituisce il fatto fisico fondamentale a cui la teoria conduce; e se ne hanno differenti verifiche nelle *esperienze di* FARADAY, che constatano la non esistenza d'elettricità all'interno dei conduttori, nel *potere dispersivo delle punte*, ecc.

Anzi può dirsi, in un certo senso, che il suddetto teorema di distribuzione *equivale* alla teoria di Poisson, cioè ne enuncia insomma tutto il *contenuto positivo*; e di più la prima parte del teorema equivale da sola all'insieme delle altre ipotesi, se si dice la rappresentazione meccanica dei fluidi elettrici. Infatti dalla non esistenza di elettricità all'interno di un conduttore (esperienze di Faraday) si deducono a loro volta le leggi dell'attrazione elettrica e in ispecie quella di Coulomb, che acquista in tal modo un grado d'approssimazione più grande di quello che le viene dall'esperimento diretto (BERTRAND).

Ora notiamo che la rappresentazione posta a base della teoria elettrostatica di Poisson può mutarsi in modo grandemente arbitrario, costruendo una serie di *teorie equivalenti*.

Accenniamo soltanto all'*ipotesi del fluido unico*, e a quella di MAXWELL che surroga al concetto di masse attraentisi e repellentisi, quello di un mezzo elastico interposto esercitante sui corpi elettrizzati delle *pressioni* e *tensioni* (cfr. cap. VI).

È difficile confrontare queste diverse teorie sotto l'aspetto della facilità di previsione o della economica descrizione dei fatti accennati, in esse ugualmente contenuti. Così la scelta viene determinata da altri criterii, cioè dalla adattabilità di esse ad un ordine più esteso di rapporti. Invero rispetto ad una *estensione della teoria*, le ipotesi rappresentative non sono più da considerarsi come indifferenti; così, p. es., la teoria del fluido unico si presta a render

conto di certe differenze fra i due stati elettrici, positivo e negativo, non più considerati simmetricamente.

Ma soprattutto in due casi si presentano dei problemi di fatto dipendenti dalle sopra accennate ipotesi rappresentative:

a) Quando si voglia estendere la teoria ad abbracciare la spiegazione dei fenomeni elettrici che avvengono nei corpi in movimento (tempo di propagazione dell'azione elettrica, ecc.).

b) Quando, senza uscire dalla Elettrostatica, si voglia tener conto del *modo come varia l'azione elettrica al variare del mezzo.*

Se, p. es., si concepisce l'attrazione di due punti elettrizzati come trasmessa secondo la linea retta che li congiunge (rappresentazione del filo elastico), si viene a supporre che codesta attrazione non varii quando il mezzo sia modificato in una parte non attraversata da quella linea; ed ecco un'ipotesi *falsa*, la quale mostra come l'accennato concetto teorico non sia adeguato ai fatti.

Da tali considerazioni sorge un motivo di preferenza per la teoria maxwelliana (cfr. cap. IV); ma a noi basta qui di aver messo in luce come la determinazione degli enti fittizii, che vengono aggiunti a rappresentare certi fatti, varii e si vada progressivamente compiendo per rispondere alla estensione delle conoscenze.

§ 27. **Teoria delle soluzioni.**

Un altro esempio interessante è offerto dalla *teoria delle soluzioni*, costruita da VAN' T' HOFF.

Il fondamento della teoria sta nell'associazione intima stabilita fra le soluzioni e i gas, sotto il concetto di *sostanza diffusibile*.

La diffusione di un gas ha trovato un'adeguata immagine nel *sistema cinetico*, ove il gas stesso viene pensato come un insieme di particelle liberamente mobili, che coi loro urti determinano la pressione. La stessa rappresentazione si può adattare alle soluzioni, attesochè il disciogliersi di una sostanza in un liquido si manifesti come una disgregazione progressiva; ed è suggestivo di paragonare questo modo di scioglimento al diffondersi di certi vapori nell'atmosfera.

La teoria cinetica dei gas (cfr. Cap. VI) conduce, anzitutto, in una prima approssimazione, alle seguenti *leggi dei gas perfetti*:

1) La proporzionalità della *massa* al prodotto del *volume* e della *pressione* (*legge* di BOYLE).

2) La proporzionalità del volume alla *temperatura* (*legge* di GAY LUSSAC).

La massa, il volume e la temperatura di un gas corrispondono immediata-

mente alla quantità della sostanza disciolta, al volume del solvente e alla sua temperatura (*densità = concentrazione*).

Come si manifesterà la *pressione di una soluzione*?

Quando abbiamo un gas in un recipiente messo nel vuoto, la pressione sulla superficie si rende facilmente manifesta, in quanto si ha una forza che agisce normalmente alla superficie stessa dall'interno verso l'esterno. Ma se nel recipiente suddetto si avessero due gas, mescolati, codesta forza si presenterebbe come la somma delle pressioni di ciascuno di essi, che, in questo caso, non riusciremmo a distinguere. Supponiamo tuttavia che la superficie del recipiente lasci passare uno dei due gas, ma non l'altro; il primo si metterà in equilibrio coll'ambiente esterno, e la forza agente sulla superficie dall'interno verso l'esterno ci darà la pressione del secondo.

Questa condizione si può analogicamente riportare ad una soluzione. Istituiamo, a tale scopo, un'esperienza ideale.

Si abbiano due vasi comunicanti nei quali si trovi un liquido, p. es., dell'acqua; questa si disporrà in essi alla medesima altezza, secondo la legge dell'equilibrio idrostatico. Il suddetto equilibrio non viene disturbato se i due vasi sono separati da un setto permeabile all'acqua.

Ora fra i setti permeabili all'acqua se ne trovano siffatti che non lasciano passare una sostanza disciolta. Se dunque si hanno due vasi comunicanti pieni d'acqua, in uno dei quali si trovi una soluzione, i due vasi siano separati da un cotal setto semipermeabile, la pressione della soluzione, dovuta agli urti delle particelle mobili che la costituiscono, si eserciterà sopra il setto. Come potremo misurarla?

Immaginiamo che il setto possa muoversi in uno dei due vasi (di forma cilindrica) a guisa di stantufo. Noi lo vedremo spostarsi per modo da aumentare il volume della soluzione. Per impedire lo spostamento occorre esercitare sul setto, nel senso inverso, una forza, la quale misura appunto la pressione che vogliamo determinare.

Siano A e B i due vasi; A contenga la soluzione; sia *s* il setto al quale sia unita un'asta che sostenga un cilindro solido *b* di raggio quasi uguale a B (come mostra la figura), ed avente una densità uguale a quella dell'acqua in cui è immerso. Il cilindro *b* si solleverà, in parte, al di sopra della comune superficie di livello dell'acqua nei vasi A e B, ed il peso della parte emersa ci darà la pressione esercitata dalla soluzione su *s*, tostochè si abbia una condizione d'equilibrio.

Ma l'equilibrio del nostro sistema, su cui agiscono forze *esterne* ed *interne*, esige che queste e quelle separatamente si equilibrino.

L'emersione del cilindro *b* assicura l'equilibrio delle forze interne. Perchè sussista quello delle forze esterne, deve essere verificata la condizione espressa

dal *principio* d'ARCHIMEDE : l'acqua deve essere salita nel vaso A alla stessa altezza cui si trova la base superiore (emergente) del cilindro *b*. Ciò posto è chiaro che l'equilibrio di tutto il sistema non viene alterato se si *fissa* il setto al vaso B, e si toglie il peso del solido *b* emerso dall'acqua, il quale diventa così inutile.

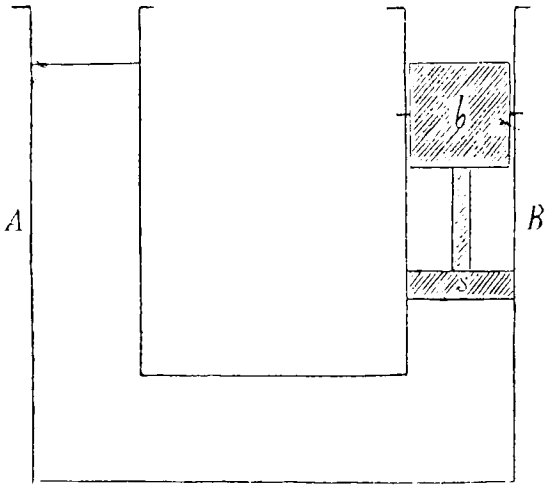


Fig. 2.

Arriviamo pertanto alla seguente conclusione :

Se sono dati due vasi comunicanti contenenti un medesimo liquido, in uno dei quali si trovi una soluzione, e se i due vasi sono separati da un setto semipermeabile, la pressione della soluzione, in quanto si concepisca la soluzione stessa come un gas, viene misurata dalla differenza di altezza del solvente nel primo e nel secondo vaso.

L'esistenza di una pressione così intesa si traduce dunque nella ipotesi di un fatto, che fu osservato sperimentalmente da PFEFFER; e la pressione anzidetta prende il nome di *osmotica*.

« La pressione osmotica di una soluzione è proporzionale alla concentrazione, ed inversamente proporzionale al volume ».

Questo fatto, che si verifica sperimentalmente in modo assai approssimato per le soluzioni diluite (Pfeffer), corrisponde dunque alle medesime ipotesi rappresentative che si traducono, pei gas, nella legge di Boyle.

Van' t' Hoff, ravvisando appunto questa legge nel fatto osservato da Pfeffer, fu tratto a prevedere che sussista ancora per le soluzioni la legge di Gay Lussac, la quale prende qui la forma :

« La pressione osmotica di una soluzione è proporzionale alla temperatura ».

E ciò fu sufficientemente verificato dall'esperienza.

Negli sviluppi precedenti abbiamo adoperato la rappresentazione meccanica come un modo di determinare ciò che corrisponde alla pressione di un gas, nell'analogia stabilita fra gas e soluzioni. L'ipotesi cinetica può dopo ciò ritenersi fino ad un certo punto come indifferente, limitandone l'applicazione ai principii dell'energetica. Appunto in base al principio dell'equivalenza fra calore e lavoro, Van' t' Hoff è riuscito a *spiegare* i fatti dell'abbassamento della *temperatura di congelazione* e dell'innalzamento della *temperatura di ebullizione*, che, per le soluzioni diluite, è proporzionale alla concentrazione (esperienze di RAOULT). Infatti, se ci si riferisce, p. es., al secondo caso, basta notare che per far bollire un liquido contenente una sostanza disciolta, occorre fornire oltre al calore di vaporizzazione, un calore equivalente al *lavoro di compressione* della soluzione.

Nel successivo progresso della teoria delle soluzioni, la rappresentazione cinetica occupa ancora un posto secondario. La legge chimica di DALTON (relativa ai volumi di combinazione dei gas) si estende alle soluzioni, in base alla teoria atomica (*ipotesi di* AVOGADRO), e si corregge allo stesso modo, ammettendo la decomposizione delle molecole in *ioni*.

Ma quando si tratta di render conto di certe particolari differenze fra i gas e le soluzioni, il ricorso alle ipotesi cinetiche rappresentative ritorna utile, giacchè, l'ipotesi di una azione del solvente sul movimento delle particelle in soluzione, conduce con JAHN, ad una correzione delle leggi delle soluzioni, in un ordine d'approssimazione maggiore.

§ 28. **Economia e sviluppo psicologico delle teorie.**

Gli esempii, scelti da alcune teorie fisiche più determinate, illustrano ciò che abbiamo detto innanzi sotto forma generale, e ci conducono a conchiudere la nostra critica delle teorie, con una nuova *posizione di problemi*.

Notammo già che una teoria scientifica può essere riguardata o come formata, da un punto di vista *attuale*, o nel suo sviluppo, cioè da un punto di vista *genetico*.

Sotto l'aspetto attuale la teoria si presenta come un insieme di fatti e quindi di previsioni; ma le stesse previsioni possono riuscire più o meno facili, dipendentemente dalla costruzione dei concetti.

La facilità della previsione viene considerata da E. MACH come lo *scopo* della scelta, che in ogni momento dello sviluppo scientifico si fa fra teorie equivalenti; più precisamente il Mach esprime questo scopo dicendo che la conoscenza tende ad assumere la forma *più economica*. E la *legge di econo-*

mia è pensata come un *principio di selezione naturale*, nella lotta fra le diverse rappresentazioni dei medesimi fatti, che si svolge nel campo individuale e sociale.

A questa veduta magnifica, si può aggiungere soltanto l'osservazione (messa in luce negli esempii precedenti) che il criterio di economia presenta, in diversi casi, un diverso valore determinativo; e mentre spesso impone la scelta entro un certo sistema di concetti o d'immagini, più di rado riesce a dirimere la questione di preferenza fra rappresentazioni diverse.

Ma se alla veduta della Scienza attuale si contrappone la veduta genetica, l'arbitrarietà delle ipotesi rappresentative va connessa anche alla possibile *estensione delle teorie*; e da questa spesso emerge un criterio di giudizio, risolvente il conflitto.

Ora in questo secondo aspetto, la teoria scientifica ci appare come uno *sviluppo psicologico*, che procede in un senso propriamente *induttivo*, cioè trae da nuove associazioni ipotesi nuove, e dalla verifica di queste s' innalza ad associazioni e ad ipotesi più estese e più precise.

Riprendendo il confronto biologico, in cui la *vita delle teorie* si confronta con quella degli esseri organizzati, si può dire che la legge d'economia pone soltanto un limite a codesto sviluppo, così come la selezione naturale opera una eliminazione degli esseri inadatti alla vita. Ma le cause positive dello sviluppo sono da ricercare nell'attività psichica, ed il modo di quello deve spiegarsi mediante una veduta delle leggi che a questa presiedono. Le *ragioni storiche* (che possono essere contrapposte all'*eredità* biologica) costituiscono un primo indirizzo di spiegazione; ma alla veduta storica si può aggiungere una *critica dei processi mentali*, che valga propriamente a dilucidare la *formazione* e la *variazione* dei concetti.

Pertanto sorgono di qui due ordini di problemi.

In primo luogo i problemi che si riferiscono allo *sviluppo deduttivo* della Scienza, cioè ai *processi logici* di trasformazione dei concetti e delle ipotesi, riguardati sia nell'aspetto puramente psicologico, sia nella applicazione propriamente scientifica. Dall'esame di questi scaturirà in particolare l'arresto necessario di ogni sviluppo deduttivo; sicchè l'alternarsi di una fase induttiva e di una fase deduttiva, che abbiamo scorto nelle costruzioni teoriche, si paleserà sotto un aspetto più generale come legge di sviluppo delle scienze.

Appunto allo *sviluppo induttivo* della Scienza si riattacca il secondo ordine di problemi cui accennavamo testè: si tratta di spiegare il significato reale e l'acquisto dei *concetti più generali ed astratti* della Geometria, della Meccanica, ecc., a cui fanno capo le varie rappresentazioni che formano oggetto delle particolari teorie.

Per tal modo la critica della Scienza ci mette in faccia a ben determinate questioni gnoseologiche.

CAPITOLO III.

I PROBLEMI DELLA LOGICA

A - La logica pura.

§ 1. Logica reale e logica formale.

Nella vita comune colui che, in una discussione, può far toccare con mano all'avversario come le conseguenze del suo ragionamento siano *false*, non esita a dichiararlo in flagrante reato di *illogicità*.

Mettere in dubbio la giustezza di codesto criterio vale quanto sostenere la tesi paradossale che « un ragionamento *buono* possa condurre a conclusioni sbagliate ». L'uomo *sensato*, volendo spiegare il suo modo di vedere in proposito, ci direbbe probabilmente che il ragionamento ha come *scopo* di giudicare del vero e del falso, e quindi il *valore* del ragionamento stesso si deve desumere dal resultato raggiunto.

Come spesso accade, il senso comune ha ragione dal suo punto di vista; in quanto i problemi non esistono per lui fuori della vita, le risposte che egli suggerisce mirano sempre ad avvicinarsi allo scopo pratico, in una veduta sintetica. E vi si avvicinano infatti, grossolanamente, come una linea retta, tirata fra due punti, può avvicinarsi ad una linea, di natura più complicata, che abbia in essi gli estremi.

Tuttavia il semplice criterio del senso comune ammette, in questo caso, delle eccezioni molto visibili. Tizio e Caio si trovano discordi in una questione; dopo avere lungamente discusso, accusandosi reciprocamente di non saper *ragionare*, viene in chiaro che uno di essi crede di aver *visto* le cose in un dato modo, mentre l'altro ritiene di aver veduto l'opposto. A questo punto, ciascuno dei due non pensa più ad accusare l'amico di essere *illogico*, ma gli rimprovera piuttosto in cuor suo di essere *cieco*; e per terminare la disputa i due si recano insieme sul posto a constatare de visu ciò che forse non hanno veduto, nè l'uno, nè l'altro.

Tizio e Caio sono dunque forzati di riconoscere che anche il ragiona-

mento di chi ragiona *bene* può non esser *buono* a stabilire la verità o la falsità di un fatto, se l'autore pur ragionando bene ha veduto male.

Tuttavia il senso comune non ha pensato ad una *eccezione* di questo genere o non se ne ricorda.... e tira diritto a gabellare per *illogico* chi perviene col ragionamento a conclusioni sbagliate.

Alla veduta sintetica delle conoscenze, che conviene al senso comune mirante allo *scopo* di esse, si oppone di frequente la veduta analitica della Scienza, la quale, decomponendo l'insieme nelle sue parti, ne giudica come fossero isolate. Il resultato scientifico non appare veramente paradossale se non in quanto è frammentario.

Colui che approfitta di una soneria elettrica, per uso domestico, vuole che il campanello suoni; se non suona la soneria è *guasta*; deve esserci rottura o contatto di fili, cause che altre volte hanno paralizzato la funzione del campanello. Viene il tecnico, esamina i fili che già aveva accuratamente isolati, e constata non esservi rottura nè contatto. Che importa? il campanello non suona.

Ma manca l'acqua nella pila; il tecnico non ha che da versarne quanto è necessario, il campanello torna a suonare. Al tecnico *importava* per ciò di distinguere la causa del *guasto*, cui voleva porre riparo.

La metafora è assai trasparente. Il processo di acquisto della conoscenza, tendente a stabilire il vero, è un'operazione complessa: il ragionamento non è che una parte del processo; non basta dunque ragionar bene per trovare il vero, ma bisogna adempiere ad un tempo altre condizioni. La scienza gnoseologica ha il compito di analizzare codeste condizioni; prima di pervenire ad una veduta sintetica le occorre di considerarle, per quanto è possibile, isolate l'una dall'altra.

Si può *isolare* il ragionamento dal suo contenuto?

Tocchiamo qui ad una questione fondamentale, dibattuta tra i filosofi. « La Logica concerne soltanto la *forma* o anche la materia del ragionamento? »; e quindi « ha essa un valore *reale* o puramente *formale*? ».

Per intendere tutta l'importanza della questione, nel suo aspetto pratico, basta riflettere al posto che la Logica ha occupato nella filosofia scolastica: mentre il suo studio era limitato alle regole formali della deduzione (o dell'induzione completa) si considerava come un'arte volta alla ricerca del vero.

Quest'errore fondamentale di cui taluno volle ricercare il germe nello stesso concetto di ARISTOTELE, riattaccandone la causa alle fonti onde questi trasse « l'arte del discorso », tende ad essere corretto per due vie, nelle quali ha proceduto il pensiero moderno.

Per una parte, tenuto fermo lo scopo, si è inteso ad allargare il dominio della Logica, comprendendo nel ragionamento anche l'interpretazione dei dati

empirici, e cercando di fissare i canoni generali di quelle associazioni che costituiscono i processi induttivi. Coloro che si sono spinti innanzi su questa via, da BACONE a STUART MILL, hanno veduto la necessità di tener presente il *contenuto reale* del ragionamento, e si sono così allontanati dalle antiche formule, nelle quali il falso si lascia adagiare altrettanto bene come il vero.

Se la nuova *Logica induttiva*, pur possedendo principii generali, è lungi dal porgere la medesima fissità ed esattezza di criterii che apparteneva all'antica, essa integra molto più adeguatamente il concetto di un'arte volta a stabilire la verità.

Da un altro lato tenuto fermo, come oggetto della *Logica*, il ragionamento nella sua *forma rigorosa*, si è inteso (da KANT, HERBART, ecc.), a mettere nella sua propria luce il carattere puramente *analitico* di codesto *rigore formale*, attribuendo al ragionamento suddetto il valore di un istrumento di trasformazione, che non alteri i dati concettuali della conoscenza, ma li lasci veri o falsi, secondo è da provare con altri mezzi, stabilendo soltanto un legame per cui la verità o la falsità degli uni porti la verità o la falsità degli altri.

Perchè il ragionamento così inteso riesca perfettamente indipendente dalla prova reale empirica, e perchè riesca rigoroso, importa che le sue leggi vengano riconosciute come puramente formali, applicabili cioè ogni qualvolta si riscontrino talune condizioni di coerenza del pensiero, senza badare al contenuto.

Infatti vi è nei dati dell'osservazione e dell'esperienza qualcosa di non bene definito che sparisce nel concetto a cui essi vengono subordinati; ed, a causa di ciò, il controllo che si eserciti sul ragionamento, in vista della realtà a cui si riferisce, non può pretendere alla medesima esattezza, che spetta al giudizio sulla sua coerenza formale.

Il movimento di pensiero proseguitosi, come si è detto, in due sensi opposti, porta, in ultima analisi, a *distinguire*, una *Logica reale induttiva*, ed una *Logica formale* (considerata spesso come) *deduttiva*, che rispondono ad un unico scopo conoscitivo.

Importa però determinare il valore di questa distinzione, in ordine al criterio classico della *deduzione* e dell'*induzione*.

Ciò che caratterizza la Logica formale rigorosa, non è la deduzione *dal generale al particolare*, poichè i procedimenti d'induzione completa ne formano parte integrante. Se dunque si vuol parlare di una Logica formale, come « deduttiva », occorre tener presente che si accorda, con ciò, alla « *deduzione* » un *significato più esteso*, di quello tradizionale, conformemente all'uso della parola fra i matematici.

Il rapporto fra la deduzione e l'induzione, così intese, risulta bene chiarito relativamente al processo conoscitivo, se ci si riferisce allo schema logico di

JEVONS (cap. II § 21). L'ufficio del ragionamento deduttivo in codesto processo è di « trasformare l'ipotesi inaccessibile all'esperienza, in altre *equivalenti*, che possano essere sperimentalmente verificate o negate ».

E emerge da ciò, più lucidamente, quale importanza spetti ad un istrumento rigoroso, il cui valore possa essere controllato indipendentemente dalle esperienze verificatrici, e dalla verità o falsità delle ipotesi, quindi anche dal loro contenuto di fatto, cioè dal significato reale del ragionamento.

Nel seguito, fisseremo di ritenere il nome di « *Logica* », *nel senso formale*, che corrisponde a codesto istrumento rigoroso di trasformazione; ed avremo poi occasione di riconoscere gl'inconvenienti che derivano dall'estendere la parola a designare lo studio dell'induzione scientifica, nel suo più largo significato. Ad evitare confusioni, contrapporremo tale studio alla *Logica pura*, designandolo come *applicazione della Logica*. E, trattando di questa, investigheremo il valore reale delle leggi formali del ragionamento e condizioni sotto cui esse divengono criterio di prova in relazione ai fatti.

§ 2. **Schemi verbali e segni.**

Ma veramente noi abbiamo riconosciuto soltanto l'utilità di una Logica formale che detti le leggi del ragionamento, indipendentemente dal suo contenuto. Resta a vedere se ed in qual senso codesta indipendenza possa effettivamente raggiungersi, in modo rigoroso. E l'esame è tanto più necessario, in quanto che tale possibilità viene contestata anche da taluni fra i più illustri seguaci della filosofia critica.

Volendo dimostrare la possibilità di una Logica puramente formale si possono tenere due vie.

La via che può considerarsi come classica, consiste nello stabilire gli *schemi verbali*, corrispondenti alle forme ideali del pensiero esatto.

Se si riesce a dare a questi schemi una rigorosa ed astratta generalità l'assunto resta dimostrato. Ma, nel caso d'insuccesso, non è lecito di trarne la conclusione opposta, giacchè il difetto dello schema può essere cagionato da un insufficiente adattamento del linguaggio, che non risponde sempre adeguatamente ai processi del pensiero esatto.

Si considerino ad es. le regole aristoteliche della conversione delle proposizioni; alle quali si riferiscono talune acute osservazioni del nostro TOCCO.

La proposizione universale affermativa si converte *per accidens* (secondo la locuzione di BOEZIO) nella particolare affermazione; così, p. es., dalla proposizione « tutti i quadrati sono parallelogrammi » si deduce l'altra « alcuni parallelogrammi sono quadrati ». Orbene si presenta come una lacuna di questa regola il caso in cui il predicato sia essenziale al soggetto. Ad es. la proposizione « tutti i triangoli sono poligoni in cui la somma degli angoli vale due retti » si convertirebbe nell'altra « alcuni poligoni in cui la somma degli

angoli vale due retti, sono triangoli », che lascia credere erroneamente alla esistenza di poligoni aventi più di tre lati, in cui la somma degli angoli sia due retti.

Ma che cosa prova questa lacuna? Questo soltanto, che la parola « alcuni » ha un significato ambiguo. Ogni matematico la prenderà sempre nel senso (affermativo) che non esclude la totalità, ammettendo dunque che la proposizione « *tutti* gli A sono B » rientri come *caso particolare* nell'altra « *alcuni* A sono B »; ma secondo l'uso comune della Grammatica, si aggiunge alla parola suddetta un significato negativo per cui l'idea di « alcuni » esclude l'idea di « tutti », e quindi le due proposizioni sopra scritte appaiono contraddirsi.

In conclusione, la regola formale di conversione a cui ci siamo riferiti come ad esempio, sussiste rigorosamente se si fissa, con una convenzione opportuna, il significato della parola « alcuni », allontanandosi dal comune uso grammaticale, secondo i criterii universalmente adottati dai matematici, in tutti i casi analoghi.

All'esempio addotto di sopra, altri numerosi se ne possono aggiungere, ove la regola logica verbalmente espressa, cade in difetto, o dà luogo ad applicazioni errate, per analoghe cagioni attinenti all'uso del linguaggio. In particolare, la duplicità di senso delle parole costituisce da sola la fonte comune dei più noti sofismi, di quelli, p. es., ove il termine medio è preso con diversa estensione nelle due premesse di un sillogismo.

E noto quanto i logici si siano occupati di cotali fallacie del ragionamento, e come essi abbiano approfondito lo studio di codesta parte grammaticale della Logica, che intende per così dire ad una correzione del linguaggio. La lingua infatti, è sempre tanto lontana dall'ideale dei logici!

Balzando fuori dal bisogno della rappresentazione delle cose, evolvendosi sotto l'impulso delle associazioni e delle analogie suggerite dalla realtà, la parola fissa in un suono quasi invariabile un contenuto che si allarga e si trasforma e si sfigura nel tempo, sicchè ad ogni istante vi sono in generale più immagini, solo in parte ricoprentisi, che corrispondono al medesimo suono. E questa è, d'altronde, una condizione essenziale del progresso.

Dinnanzi alla precedente constatazione, la Logica grammaticale si arresta, costretta a riconoscere che gli schemi verbali del ragionamento non porgono una sicura garanzia della sua esattezza, e non soddisfano insomma alle più raffinate esigenze del rigore formale. Quindi l'impulso ad un indirizzo nuovo, in cui la ricerca degli schemi verbali viene rimpiazzata da quella di *segni convenzionali*. Sorge così la costruzione di una *Logica simbolica*, ispiratasi all'algoritmo algebrico, cui vien dato il nome di *Logica, Pasigrafia* o *Ideografia matematica*.

I primi fondamenti di codesta costruzione risalgono al LEIBNIZ (verso il 1700), ed un perfezionamento vi recò il LAMBERT intorno al 1750. Ma tali sviluppi rimasero interrotti quasi un secolo, e furono ripresi in parte indipendentemente, dalla scuola geometrica inglese (PEACOCK, DE MORGAN, BOOLE), e da H. GRASSMANN e W. R. HAMILTON, il quale ultimo non deve essere confuso coll'autore della quantificazione del predicato (dottrina che procede assai meno avanti nel senso della Logica simbolica).

PEIRCE e SCHRÖDER (1877), PEANO (1888-89) e FREGE (1891), hanno esteso e compiuto l'algoritmo logico, fino a renderlo atto all'espressione di intiere teorie matematiche [1].

Qualunque possa essere il valore del sistema come istrumento di critica matematica, (e noi già avemmo occasione di accennare al difetto dei criterii puramente formali che taluni ricercatori sembrano attingere negli studi sui principii della Geometria) devesi pur riconoscere come esso costituisca, sotto varii aspetti, un grande progresso sopra la Logica scolastica, e porga una risposta più adeguata al problema di assegnare gli schemi del ragionamento esatto.

Per raggiungere questo scopo, la Logica matematica abbandona l'uso delle consuete forme verbali, e crea *ex novo* un dizionario di segni, ogni segno facendosi corrispondere, senza ambiguità, ad un oggetto. Ma astraendo dal significato concreto degli oggetti, si propone di rappresentarne i rapporti logici, che un'analisi approfondita riesce a fissare e a ridurre a pochi tipi generali, anch'essi simbolicamente rappresentati; il ragionamento trova pertanto la sua espressione in una specie di calcolo logico, analogo, come abbiamo accennato, al calcolo algebrico.

Soprattutto i logici matematici della scuola di Peano hanno spinto innanzi queste analogie, proseguendo la deduzione dei *teoremi di Logica*, che riassumono le combinazioni di pochi principii fondamentali del ragionamento

Pertanto la Logica simbolica, costruita come una teoria deduttiva sul modello dell'Aritmetica o della Geometria, viene a costituire un istrumento che porge compiuti, abbrevia o controlla certi sviluppi, di cui può occorrere più di frequente l'uso nelle varie scienze.

§ 3. **Logica simbolica e logica psicologica.**

La seconda via, che vale a stabilire la possibilità di una Logica formale è lo studio del processo del pensiero, ricostruito direttamente attraverso i suoi prodotti scientifici, all'infuori di ogni particolare espressione mediante parole o segni. E precisamente conviene di ritornare a quegli sviluppi recenti delle

[1] Vedasi il « Formulaire de Mathématiques » che si pubblica a Torino sotto la direzione di G. PEANO, ed a cui collaborano PADOA, PIERI, VACCA, VAILATI, ecc.

Matematiche, da cui la stessa logica algoritmica (detta appunto per ciò matematica) ha tratto alimento.

Or dunque al concetto tradizionale della Logica grammaticale, o più generalmente simbolica, contrapponiamo quello di una *Logica psicologica*, la quale negli schemi e nei segni riguarda non tanto le formule scritte, quanto le convenzioni e le norme non dichiarate sul foglio (ed inintelligibili all'infuori della riflessione psicologica) che ne reggono i modi di combinazione.

La Logica così intesa, non costituisce più una teoria deduttiva sussidiaria agli sviluppi scientifici, ma una scienza di osservazione e di confronto avente come oggetto proprio la critica dei procedimenti elementari del pensiero, che si rispecchiano nei principii fondamentali del ragionamento; i quali procedimenti essa vuole *spiegare* come una realtà psicologica.

Occorre per altro respingere anticipatamente una comune obiezione contro il concetto sopra esposto della Logica, determinando i rapporti fra Logica e Psicologia.

A distinguere l'una dall'altra, si osserva generalmente che la prima ha *carattere normativo per riguardo al vero*, mentre la seconda è una pura descrizione di procedimenti mentali, *giusti* od *errati*.

Secondo il nostro punto di vista (rigorosamente formale), importa anzitutto correggere l'opinione che le norme logiche abbiano un valore a priori, rispetto al vero; ma per una discussione intorno a ciò, rimandiamo alla seconda parte di questo capitolo.

Riconosciamo, ad ogni modo che la Logica può riguardarsi come un insieme di norme, le quali *debbono* osservarsi, *se si vuole* la coerenza del pensiero. Ma ciò può anche essere espresso dicendo, che: fra i varii procedimenti mentali, se ne distinguono alcuni, in cui vengono volontariamente soddisfatte certe condizioni di coerenza, i quali si denominano appunto procedimenti logici.

In questo senso la Logica può riguardarsi come una parte della Psicologia.

§ 4. **Possibilità della Logica formale desunta dallo sviluppo delle Matematiche.**

Esaminiamo da questo punto di vista psicologico, gli sviluppi recenti delle Matematiche, cui accennavamo testè. Verremo così a:

1) riconoscere a posteriori la possibilità di una Logica formale;

2) definire propriamente « ciò che è logico », in contrapposto a procedimenti del pensiero ove lo sviluppo logico non è reso indipendente dalla rappresentazione delle immagini in esso elaborate.

La possibilità di una Logica formale risulta anzitutto da questo. Il medesimo rigore, la stessa inflessibile coerenza, regge gli sviluppi del pensiero nei campi diversi delle Matematiche, così in quelli più vicini ad una fisica

applicazione, come nei più lontani ed astratti, ad es. nella Geometria degli *spazii a più dimensioni* o *non-euclidei* o *non-archimedei*, ecc.; e queste astratte teorie hanno per loro stesse un'esistenza analitica (come edifizii logici), se pure non esiste un oggetto reale a cui si riferiscono.

Ma vi è di più. Seguendo PLUECKER si è introdotta nella Geometria una veduta estremamente feconda, che porge un principio di trasformazione delle teorie, basato appunto sul loro valore formale.

Si consideri una teoria geometrica come un sistema di rapporti logici, intercedenti fra certi concetti designati dalle parole « punto » « linea », ecc. Si può lasciare alle parole un significato astratto indeterminato, riguardandole dunque come simboli di concetti ignoti, ma soddisfacenti formalmente alle proposizioni fondamentali che esprimono i rapporti geometrici. Allora è lecito di fissare a piacere, con una convenzione, il significato dei simboli, in guisa però da soddisfare alle anzidette condizioni normali; si ottengono così infinite possibili *interpretazioni concrete* della teoria geometrica astratta.

Non è qui il luogo per accennare alle conseguenze matematiche di questo fecondo principio; diremo soltanto che esso ha sviluppato negli spiriti critici il sentimento della Logica formale e ha fornito la più concludente dimostrazione *a posteriori* della sua possibilità.

Tale sentimento si ritrova, nettamente esplicato, nelle più recenti sistemazioni rigorose dei principii della Geometria (PASCH, PEANO, VERONESE, ENRIQUES, HILBERT....), di cui M. PASCH sembra avere porto il primo modello nelle sue « Vorlesungen ueber neuere Geometrie (1882) » (1).

Ma dalla critica geometrica sopra accennata, ed in particolare dal confronto delle trattazioni suddette, risulta non soltanto *dimostrata* la possibilità di una Logica formale, bensì anche *definito* precisamente il senso in cui l'aspetto formale della Logica deve essere inteso.

Si tratta perciò di riconoscere (e ciò può farsi anche all'infuori di ogni particolare espressione grammaticale o simbolica) i requisiti che da esse si osservano nella forma delle definizioni e dei postulati, ed in qual modo venga inteso un assetto *rigorosamente logico* di una teoria, o per contrapposto quali modi di trattazione vengano tenuti come *non rigorosi*.

§ 5. **Critica della definizione.**

L'idea di desumere lo studio della Logica dallo sviluppo delle Matematiche, ed in ispecie della Geometria, è tutt'altro che moderna.

Infatti già ARISTOTELE prese come base della sua costruzione la Geometria e la Retorica.

(1) Vedasi l'articolo di F. ENRIQUES: « Prinzipien der Geometrie » nella « Enciclopedie der mathematische Wissenschaft », edita da Teubner, Lipsia.

Ora i progressi critici, accennati testè, vengono non soltanto a completare le regole aristoteliche della *deduzione*, ma soprattutto ad istituire una nuova dottrina della *definizione*, la quale può considerarsi come un acquisto affatto recente, a cui diversi pensatori sono giunti, in modi diversi ed in parte indipendentemente gli uni dagli altri, negli ultimi vent'anni.

Per penetrare nell'analisi del processo logico del pensiero, conviene appunto prender le mosse da codesta critica della definizione.

Nel concetto comune si attribuiscono alla definizione due significati contraddittori. Per una parte si considera come un processo di riduzione che, essendo dati certi concetti, permette di stabilirne dei nuovi. Per l'altra parte si pretende, se pure non lo si affermi esplicitamente, che essa possa stabilire il significato reale di un concetto qualsiasi. In pratica si riconducono le nozioni più complesse alle più semplici, riguardo alle quali ogni dilucidazione sembra inutile. Ma se si domanda di definire quest'ultime, non ci si fa riguardo dallo spiegarle mediante le prime.

Così ci si aggira chiaramente in un circolo vizioso; riesce facile comprenderlo a chi si proponga di redigere il dizionario di una lingua qualsiasi.

Non si può eliminare la contraddizione se non si conceda esservi una differenza netta fra definizioni e definizioni, secondo si tratta di un vero processo logico riduttore, o dello stabilimento di quei concetti primi e più semplici, per mezzo dei quali i più complessi vengono generati.

Questa differenza si mostra luminosamente a chi si proponga di esaminare, sotto l'aspetto critico, un trattato di Geometria.

Nei trattati per le scuole elementari si spiega che cosa sieno le figure fondamentali, mostrandone un modello conveniente per mezzo di un disegno. Si dà così una *definizione concreta* dei primi termini del linguaggio geometrico.

Ma questo procedimento non piace più al maestro che deve spiegare le medesime cose ad alunni più maturi. Per lui la definizione concreta delle figure ideali della Geometria è soltanto un mezzo suggestivo di svegliare certe idee nella mente del discepolo; ha insomma un carattere psicologico, di cui non è soddisfatto. E nella piena coscienza che esista una differenza netta fra la Geometria razionale e la empirica, guardando a quest'ultima con un profondo disprezzo, pretende che nella sua trattazione tutto venga definito in un modo puramente logico.

Prendiamo come esempio la definizione, che ancora taluni trattati danno, della linea retta, secondo LEGENDRE : « la retta è la linea più corta fra quelle che uniscono due punti ».

È interessante di arrestarsi un momento ad esaminare quello che questa definizione c'insegna, e quello che non c'insegna.

Si pretende, per ipotesi, trattarsi di una definizione logica. In questo

senso essa dice che il concetto della retta si riconduce a due altri più generali, cioè al concetto di una *linea* e a quello della sua *lunghezza*. Se si volesse determinare rigorosamente il significato reale di questi, ci si troverebbe molto imbarazzati; ma riesce più comodo di non fermarsi sulla domanda. Non insistiamo su questo punto, e procediamo oltre nel nostro esame.

Si avrebbe diritto di chiedere, almeno, che dalla definizione vengano dedotte logicamente le proprietà della retta, facendo appello a qualche proprietà generale delle linee e della loro lunghezza. Ma già la più semplice proprietà, secondo la quale due rette non possono avere più di un punto comune, costituisce una proposizione, che si può ritenere impossibile a stabilire per questa via [1], e che perciò ci si trova costretti ad aggiungere alla definizione, come un postulato.

Nei successivi sviluppi, concernenti figure più complesse, vi è luogo a richiamare codesto postulato o altri analoghi, i quali mettono in luce le più semplici proprietà della linea retta; mai si ricorre alla proprietà che ne costituisce la pretesa definizione.

Allora, se non si vuole cambiare il senso ordinario della parola, bisogna convenire che la pretesa definizione di Legendre, non è una definizione sotto l'aspetto logico, o almeno che non ne occupa il posto nell'accennato organamento logico della Geometria elementare.

Ma se la ricordata definizione non ci apprende le proprietà elementari della retta, a cui si ha ricorso nello sviluppo logico della Geometria, non si potrebbe negare che essa ci apprenda tuttavia qualche cosa. Difatti gli allievi la trovano perfettamente chiara, e ammettono volentieri che essa porga loro un'idea precisa della linea retta.

In qual modo viene raggiunto questo resultato incontrastabile?

È facile comprenderlo. Poichè il concetto generale della linea richiama alla mente l'immagine di un filo, parlando della linea più corta fra due punti, si fa sorgere avanti agli occhi l'immagine di un filo teso, che è una buona rappresentazione sensibile della retta.

Ma allora, la pretesa definizione della retta non vale a determinarla meglio di un qualunque altro procedimento analogo di spiegazione per mezzo di un modello concreto; onde s'inganna l'insegnante che vi ricorre colla pretesa di fare qualcosa di essenzialmente diverso.

Abbiamo scelto come esempio la definizione della retta data da LEGENDRE, della quale a dir vero la critica ha fatto giustizia da lungo tempo,

[1] Si prova matematicamente l'impossibilità della dimostrazione, appena sieno precisati con opportuni postulati, rispondenti all'ordinaria intuizione, i concetti di « linea » e di « lunghezza di una linea »

ma che pure è ancora diffusa in alcuni ordini delle nostre scuole. Si potrebbero sviluppare simili riflessioni per riguardo alle definizioni date dai geometri antichi e moderni, da EUCLIDE fino ai nostri giorni (esclusi soltanto i più recenti autori critici). Bisogna diffidare delle definizioni che si trovano in testa ad un trattato di Geometria; non sono definizioni nel senso logico della parola, ma semplici *descrizioni* o definizioni in senso psicologico.

Del resto è facile riconoscere la differenza che le separa dalle definizioni propriamente dette, che s'incontrano nel medesimo trattato dopo le prime pagine. Quest'ultime possono, quando si voglia, venir soppresse, rimpiazzando il termine definito con una circonlocuzione; ma si provi a fare lo stesso per riguardo alle prime! Il proposito medesimo si palesa subito assurdo. Ed invero, come sarebbe possibile di sviluppare una Geometria qualunque, dopochè si sieno eliminate dal linguaggio, l'una dopo l'altra, tutte le parole connotanti delle idee geometriche?

In qualunque modo si cerchi di girare la difficoltà non si sfugge alla conclusione fondamentale, che discende dalle osservazioni precedenti:

Vi è in Geometria una differenza netta fra definizioni e definizioni, secondo si tratta dei concetti primi o di quelli a cui si dà origine nello sviluppo della scienza. Le ultime definizioni soltanto sono perfette, in modo che è lecito di rimpiazzare il termine definito coi termini impiegati per definirlo, cioè hanno un significato relativo rigorosamente determinante.

Sono dunque solamente le definizioni di codesto genere, che debbono riguardarsi come vere *definizioni logiche*. Al contrario le consuete definizioni dei primi concetti geometrici non possono ritenersi vere definizioni, se non in un senso esteso della parola; ed in questo senso sono a dirsi *definizioni psicologiche*; col qual nome si mette in evidenza il loro ufficio di richiamare certe *immagini*, e di suggerire la visione dei loro rapporti.

§ 6. **Definizioni reali e definizioni nominali.**

Le riflessioni sviluppate prendendo argomento dalla Geometria, si estendono naturalmente ad una scienza o ad una teoria deduttiva qualunque.

Così è facile di scorgere in un Codice la netta differenza che separa le definizioni dei concetti giuridici fondamentali, ad es., della *proprietà*, del *contratto*, ecc., da quelle di particolari oggetti possibili di proprietà, come, p. es., un *tesoro*, o di speciali contratti, come, p. es., il *pegno* o l'*anticresi*.

Le prime hanno così poco il valore di definizioni, perfette e rigorose, che non si possono intendere senza tener presente l'insieme delle successive disposizioni dello stesso codice; ad esse bene si può riferire la prudente massima del Digesto (leg. 202, 50, 17) « Omnis definitio in jure civili periculosa est; parum est enim ut non subverti possit ».

Si trovano generalmente, in ogni teoria deduttiva, due specie di definizioni: quelle che servono a stabilire i concetti fondamentali sono considerate come *reali*, quelle che s'introducono strada facendo sono dette definizioni *nominali*.

Ora le definizioni reali non hanno altro ufficio che di richiamare, in una formula concisa, alcune delle proprietà, note o supposte, dei concetti, alle quali bisogna aggiungere il più spesso altre ipotesi o affermazioni esplicite; ed in questo senso non si può disconoscere la loro importanza. Ma quando, in luogo di attribuir loro il valore di semplici descrizioni, si denominano col titolo di definizioni, nasce il pericolo di fissare l'attenzione sopra un legame formale delle idee riguardate in un aspetto particolare, anzichè sul loro significato reale, e di mantenere l'illusione che una spiegazione di parole possa sostituire un insieme di osservazioni e di esperienze, aventi come scopo di determinare codesto significato.

Diremo dunque che *la definizione reale non è una definizione logica*, ma soltanto una *definizione psicologica*, cioè un modo di far sorgere un certo concetto nella mente altrui, per mezzo di immagini opportunamente rievocate ed associate.

Pertanto la più precisa e tipica definizione reale è la *definizione concreta* che si dà del nome di un oggetto, mostrando l'oggetto stesso e pronunziando insieme la parola che lo denota. Quando si tratti di definire un termine un po' generale, riferentesi sempre ad oggetti concreti, si può mostrare un certo numero di questi e fissare l'attenzione sui loro caratteri comuni.

Sebbene questi casi siano più semplici di quelli che spesso occorre considerare, il fondamento della definizione concreta consiste sempre nello stabilire un'associazione fra una parola ed una certa serie di sensazioni.

La definizione, riguardata sotto tale aspetto, appartiene piuttosto al campo dell'osservazione e dell'esperienza che a quello della Logica. Così, ad es., spetta all'osservazione anatomica e fisiologica, cadente nel dominio della Zoologia, di stabilire precisamente i caratteri degli animali che voglionsi attribuire ad una certa specie.

Tuttavia la definizione concreta non serve a stabilire le idee un po' astratte ed i concetti elaborati per un più lungo lavoro di associazione e di astrazione del pensiero. In questi casi la percezione di qualche oggetto non basta sempre a far compiere nello spirito altrui il medesimo lavoro che si è prodotto nel nostro. Ed appunto qui si ricorre generalmente ad una descrizione, la quale dando la spinta ad un siffatto lavoro, adempie l'ufficio di definizione psicologica.

Se possiamo esser sicuri che la costruzione del concetto si è compiuta nello stesso modo nello spirito altrui come nel nostro, il significato iniziale della parola colla quale lo rappresentiamo riesce stabilito. Così appunto accade

nella Geometria elementare, ove la vista di un grossolano modello, o una qualsiasi semplice descrizione, basta a richiamare il processo già compiutosi nella mente di ciascuno, e a risvegliare quindi la chiara idea dell'ente (punto, linea, superficie....) che si vuol definire.

Ma generalmente vi è, sotto tale riguardo, un'incertezza, la quale si riflette sul significato delle parole, connotanti oggetti generali od astratti. La descrizione non ci dà allora più un'esatta determinazione, ma chiarisce il senso reale dei concetti, soltanto in un modo incompleto e non rigoroso.

§ 7. **Definizione implicita.**

La difficoltà che qui si presenta è eccezionalmente grave, poichè ogni indeterminazione nel significato iniziale dei concetti primi, si riflette in una indeterminazione della teoria deduttiva che li concerne; e tanto più cresce il danno quanto più la teoria venga proseguita, lontano dal punto di partenza.

Una deduzione movente da dati non rigorosamente stabiliti, nella migliore ipotesi può acquistare soltanto un valore subiettivo; e ciò dovrebbe stare sempre davanti agli occhi dei filosofi.... Nella Scienza, abbia pure carattere ipotetico ed analitico, questa mancanza di determinazione dei dati fondamentali non può essere tollerata, o almeno non può esserlo al di là di un certo segno, che dà la misura del *rigore pratico*, da fissarsi, con cauto giudizio, in relazione agli errori dell'osservazione e dell'esperienza.

Ma, logicamente parlando, una teoria deduttiva non potrà dirsi soddisfacente, se ogni indeterminazione dei dati non sia rigorosamente eliminata.

Questa perfezione è, almeno teoricamente, raggiungibile *sotto l'aspetto formale*, ove, lasciando non definiti esplicitamente i primi concetti, se ne porga una *definizione logica implicita*, mediante un *sistema di postulati*. Ed è appunto questa la via che i geometri hanno percorso, onde dare alla Geometria un assetto logico.

Pertanto, l'enunciazione di una teoria deduttiva, comprenderà dei simboli A, B, C.... rappresentanti i concetti fondamentali non definiti, ed un certo numero di *rapporti logici* fra questi, assunti come *postulati* o proposizioni primitive, da cui tutte le altre proposizioni verranno dedotte come *teoremi*. I *postulati si riguarderanno costituire nel loro insieme la definizione implicita dei concetti dati*, per quanto occorre alla teoria fondata su di essi.

Quando si dice che « i postulati designano rapporti logici dei concetti fondamentali A, B, C.... » s'intende che essi rivestono una forma generale o astratta, per modo da riuscire intelligibili allorchè si prescinda da ogni visione immaginativa di questi, ritenendo soltanto che A, B, C.... sono ottenuti, p. es., dalla riunione di certi elementi (non definiti), ecc.

Non tutti i rapporti intuibili fra A, B, C.... possono ridursi a codesta

forma logica, quando non si ammetta di *aggiungere* ai dati *nuovi concetti non definiti*.

L'analisi del processo del pensiero ci condurrà più tardi a spiegare psicologicamente i rapporti logici come espressioni di supposte associazioni e dissociazioni di oggetti. Diamo intanto alcuni esempii atti a chiarire le distinzioni precedenti.

I postulati :

1) due punti appartengono ad una retta e ad una sola,

2) una retta ed un punto fuori di essa appartengono ad un piano ben determinato,

3) un piano contiene la retta cui appartengono due qualunque dei suoi punti,.

esprimono rapporti logici fra i punti, e le rette e i piani concepiti come « classi di punti ».

Invece le proposizioni dove si parla di *movimento* delle figure (costituite da punti, rette e piani) o della loro *congruenza* (uguaglianza), non esprimono rapporti logici fra i nominati concetti, perchè la loro intelligibilità è subordinata all'intuizione delle figure stesse; dalla quale si può fare astrazione soltanto dopochè si sia aggiunto agli oggetti non definiti un nuovo concetto che risulta dall'analisi delle esperienze immaginative sul movimento, sia, per es., quello di un certo gruppo di corrispondenze fra punti, ecc. ([1]).

Importa comprendere chiaramente quale sia il valore conoscitivo della definizione implicita. Quando, p. es., in una trattazione geometrica, si definiscono, mediante postulati, il punto, la retta, ecc., si ha quel che occorre per decidere se certi rapporti logici di quei concetti sussistano oppur no; ma, se l'oggetto designato col nome « punto » sia qualcosa che si avvicina al corpuscolo fisico, o piuttosto un altro oggetto qualsiasi (p. es., un cerchio pensato come elemento del sistema dei cerchi di un piano), ecco una questione che i postulati non ci abilitano in alcun modo a risolvere, poichè oggetti diversi, in quanto formino una classe dotata di certe proprietà astratte, possono cadere ugualmente sotto la medesima trattazione geometrica.

In altre parole la *definizione implicita* non funge in una teoria come *definizione reale* che determini i concetti fondamentali o i simboli primitivi, ma come un *surrogato* di questa *relativamente* al giudizio formale che concerne le deduzioni della teoria stessa; insomma essa lascia possibili infinite determinazioni diverse pel significato reale di codesti simboli, vincolati, come si è detto, a verificare formalmente le proporzioni fondamentali postulate.

Pertanto, negli sviluppi effettivi della Scienza, occorre completare sotto

([1]) Cfr. i collectanea di F. ENRIQUES: « Questioni riguardanti la Geometria elementare », Bologna, Zanichelli 1900: passim ed in ispecie l'art. monografico di A. GUARDUCCI.

l'aspetto reale la definizione implicita con una *interpretazione concreta*, fissando, mediante opportune osservazioni ed esperienze, il significato dei termini non definiti, coi quali si vogliono rappresentare oggetti concreti o rapporti fra oggetti, e fissare quindi quali fatti (o supposizioni di fatto) s'intendano espressi dai postulati, per modo che il contenuto reale dei rimanenti concetti non definiti risulti così determinato dalle relazioni poste.

Avvertiamo che l'essere incompleta sotto l'aspetto reale, non costituisce un *difetto* della definizione logica implicita, dato l'ufficio scientifico della teoria deduttiva, di cui essa è il fondamento. Si tratta invero di sottomettere un certo sistema di ipotesi ad un giudizio sperimentale, per mezzo di una razionale trasformazione di esse, e perciò *importa* che *queste ipotesi vengano prese nel loro insieme isolatamente da ogni altra ipotesi che i fatti potrebbero suggerire*; evidentemente un tale scopo si raggiunge nel modo più rigoroso, se si usa di un processo di trasformazione che pone momentaneamente in oblio i fatti medesimi.

§ 8. **Esempii: concetti fisicamente dati.**

A dilucidare le cose dette innanzi, vogliamo accennare su qualche esempio il procedimento critico che deve porsi in opera per ottenere la definizione implicita di un concetto o di un sistema di concetti.

Anzitutto occorre distinguere *due modi* diversi secondo cui il *concetto* si presume *dato*:

1) o si tratta di concetti che si vogliono determinati in guisa da rappresentare una certa realtà fisica;

2) o si tratta di concetti, comunque acquisiti, che si considerano nella loro realtà psicologica, indipendentemente dalla rispondenza o meno di essi a qualche oggetto esteriore che da essi si ritenga rappresentato.

Si presenta il primo caso nelle teorie fisico-matematiche, i cui concetti risultano implicitamente definiti quando si siano determinate delle *equazioni* fra quantità, fornite da opportuni processi di *misura*; le quantità suddette sono qui gli oggetti non definiti, e le equazioni sono i postulati che ne esprimono i rapporti logici; la misura è il mezzo di interpretazione concreta, che serve ad attribuire alla teoria deduttiva il suo proprio significato fisico.

Ora lo sviluppo di questa teoria al cimento dell'esperienza, viene a modificare le equazioni suddette e quindi a *correggere* progressivamente la definizione implicita, la quale perciò *esprime, in ogni momento del progresso della teoria, la più alta sintesi degli acquisti ottenuti.*

Lo sviluppo di una teoria, il confronto delle misure che forniscono le quantità fondamentali, riescono talvolta a modificare indirettamente le equazioni, modificando l'interpretazione concreta delle quantità legate da esse.

Un esempio semplice di questa circostanza, vien porto dalla evoluzione

del concetto di *temperatura*, che può schematicamente disegnarsi come una successione di tre definizioni, relative a conoscenze sperimentali di precisione crescente :

1) Riconoscimento che le sensazioni di calore sono connesse alle dilatazioni dei corpi, e conseguente definizione dell'aumento di temperatura come proporzionale a quello di volume.

2) Riconoscimento che le dilatazioni dei corpi fra *temperature uguali* non sono sempre proporzionali, quindi *relatività* della misura della temperatura al *termometro*; delimitazione dei *termometri a gas*, sensibilmente accordantisi per definire « la temperatura ».

3) Riconoscimento del disaccordo dei termometri a gas, in un ordine di valutazione più precisa, e costruzione di un criterio ideale di misura che risponda all'insieme dei termometri, cioè *temperatura assoluta* (cfr. cap. VI).

§ 9. **Concetti psicologicamente dati.**

L'analisi di un concetto, che vale a porgerne una definizione implicita, si presenta sotto una luce diversa, quando si tratta di determinare o di ricostruire concetti, generati in qualunque modo nello sviluppo del pensiero, i quali vengono riguardati appunto come oggetti di questo. Siamo allora nel campo della *critica psicologica* e *storica*.

Entra, almeno per una parte, in codesto genere di critica, l'analisi volta a determinare il contenuto di un concetto giuridico, in un sistema di diritto positivo.

Se, p. es., si ponga il problema di spiegare, in questo senso, il concetto della *proprietà*, secondo il nostro diritto vigente, si potrà assegnare alla critica due scopi diversi :

1) o domandare la semplice interpretazione della volontà espressa dal legislatore,

2) o chiedere quale concetto dell'istituto giuridico risulti dal complesso di tutte le condizioni di fatto, che contengono implicitamente un diritto.

Nel primo caso si tratta proprio di definire un concetto psicologicamente dato; nel secondo il problema partecipa dei due aspetti dell'indagine psicologica e della critica realistica, in quanto certi rapporti sociali di fatto, vengono messi a confronto colla rappresentazione, che ce ne vien porta dalla legge e dalla giurisprudenza.

Se ci arrestiamo un momento a meditare intorno al problema sovraccennato, sia pur preso nel suo senso più ristretto, subito appare la difficoltà propria di un tale ordine di questioni.

Anzitutto è chiaro che l'art. 436 del Codice civile [1], non può consi-

[1] « La proprietà è il diritto di godere e disporre delle cose nella maniera più assoluta, purchè non se ne faccia un uso vietato dalle leggi e dai regolamenti ».

derarsi in alcun modo come una definizione della proprietà, sia perchè ne riduce il concetto a quello generale di « diritto », sia perchè, mirando ad una condizione di proprietà perfetta (non modificata), riesce insufficiente a stabilire i limiti e le menomazioni, che il diritto subisce nei varii casi.

D' altronde per quanto già abbiamo avvertito, una vera definizione logica della proprietà non può neppure essere richiesta, dovendo essa necessariamente fondarsi sopra concetti equivalenti a quello che si vuole spiegare; piuttosto è da domandarsi di determinare, con opportuni enunciati, « i modi volontarii di agire sulla cosa, che la legge garantisce al proprietario ».

I quali appunto dovrebbero essere determinati, tenendo conto :

1) della natura fisica della cosa, cui la proprietà si riferisce, (cose mobili ed immobili, cose immateriali come crediti, diritti di autore, brevetti, ecc.);

2) delle condizioni giuridiche della cosa stessa, cioè dei diritti reali che vi sono connessi;

3) del rapporto tra il proprietario e la cosa (se questi ne abbia il possesso, ecc.).

§ 10. Il processo logico: posizione di problemi.

Negli sviluppi precedenti, dopo avere caratterizzato la Logica formale, in un senso psicologico, ne abbiamo desunto la possibilità dallo sviluppo delle Matematiche. Ancora da questo siamo stati indotti ad istituire una critica della definizione, ed in ispecie a riconoscere come logicamente primitiva la definizione implicita dei concetti; talune questioni relative al modo di stabilirla, ci hanno fermato nei due ultimi paragrafi, il cui contenuto esce dal campo della Logica pura.

Comunque la critica scientifica sia pervenuta a definire implicitamente i concetti di una teoria deduttiva, lo sviluppo logico di questa ritiene soltanto che si *suppongono dati* :

1) degli oggetti,

2) dei rapporti logici fra di essi,

subordinatamente a talune condizioni, che dovremo poi sottoporre ad esame.

E lo sviluppo consta di :

1) definizioni (nominali) costruttrici di nuovi oggetti,

2) deduzioni (nel senso largo della parola) che aggiungono ai primitivi nuovi rapporti logici, fra gli oggetti dati e costruiti.

Tutti ammettono l'importanza della deduzione; ma non ugualmente viene riconosciuto l'ufficio della definizione logica (esplicita); la stessa designazione di « nominale », fa pensare alla semplice introduzione di un nome, e quindi ad una economia di parole pei trattatisti. Giova pertanto rilevare che il nome

o la locuzione abbreviata, suggellano un processo costruttivo compiuto dal pensiero, nel quale consiste il valore proprio della definizione.

Così, p. es., in un trattato di Geometria, le parole « poligono », « poliedro », « cerchio », « sfera », potrebbero essere rimpiazzate da una locuzione più lunga, ove si parli soltanto degli elementi primitivi, punto, segmento, piano, distanza, che entrano nella definizione delle nominate figure; ma si dovrebbero ancora tener fissi taluni gruppi di parole o di segni, corrispondenti a certi modi di associazione degli elementi; e l'espresso proposito di considerare questi gruppi, formati nello sviluppo della scienza, equivale alla definizione di cui si tratta.

Simili esempii possono trarsi dalla Fisica, dove taluni concetti, come quello di « funzione potenziale » per quanto nominalmente definibili per mezzo di altri dati, segnano un acquisto della più alta importanza.

Le definizioni e deduzioni, che costituiscono lo sviluppo di ogni teoria, sono da riguardare, secondo il nostro punto di vista, come *operazioni psicologiche*; l'insieme di queste verrà designato col nome di « *processo logico* ».

Sorge quindi il problema di *spiegare psicologicamente* il processo logico.

A tal fine esamineremo anzitutto le *operazioni logiche fondamentali*, che corrispondono alle definizioni, arrestandoci un momento a mostrare come esse permettano di generare dei *concetti puramente logici*, e come la loro classificazione si rispecchi in un'analisi dei *tipi elementari della definizione*. Dalle operazioni suddette, vedremo poi venir *costruiti* non soltanto dei concetti, ma certi *rapporti logici* fra questi, e saremo condotti così alla domanda se quelli che consideriamo come *rapporti logici dati* (p. es., i postulati di una teoria) possano ritenersi costruiti da un analogo processo operativo: la qual domanda ammetterà una risposta affermativa, purchè si allarghi convenientemente il significato di codesto processo, in relazione alla *supposizione* di oggetti del pensiero.

Finalmente esamineremo le *condizioni di possibilità* del processo anzidetto, trattando dei *principii logici*, sia per rispetto agli oggetti presi come elementi o individui del pensiero, sia per rispetto ai concetti, e discuteremo le questioni di *compatibilità* dei postulati, che vi si riattaccano.

§ 11. **Operazioni logiche.**

Supponiamo *dati* degli oggetti del pensiero, che riteniamo come elementi o individui, capaci di entrare in certe associazioni, soddisfacendo tuttavia a certe *condizioni d' invarianza*, che vedremo poi espresse dai principii logici.

Le *associazioni* e *dissociazioni* psicologiche, che cadono nel dominio della coscienza chiara e della volontà, costituiscono le *operazioni logiche fondamentali*, e permettono di generare nuovi oggetti del pensiero, a partire dai dati.

Si possono associare più oggetti pensandoli come rappresentazioni *successive* o *simultanee*, e si riesce così ad

ordinarli in una *serie* (gruppo ordinato),

oppure a

riunirli (o *congiungerli*) in una *classe* (gruppo, insieme, ecc.).

Sotto certe condizioni si possono ordinare più serie in una *serie composta* (serie di serie).

E si possono sempre congiungere più classi qualunque in una *classe composta* (classe di classi).

Dall'ordinare due classi o dal congiungere due serie, sotto certe condizioni, si riesce a *riferire* gli elementi di una classe a quelli di un'altra, secondo una *corrispondenza*, ecc.

Oltre all'*inversione* dell'ordine di una serie o di una corrispondenza, si possono considerare, come contrapposti ai precedenti, dei processi propriamente dissociativi, o di *disgiunzione*, i quali conducono ad

interferire le classi componenti in una classe composta, cioè a determinare, ove esista, l'insieme dei loro elementi comuni (interferenza),

oppure ad

astrarre dalla distinzione degli elementi di una classe, cioè a costruire un oggetto, « il *concetto astratto* dell'elemento della classe », il quale può essere rappresentato da un qualsiasi elemento di questa, che venga pensato come *sostituibile* (*uguale*) a ciascuno degli altri.

§ 12. **Concetti puramente logici.**

Le operazioni logiche hanno per effetto di costruire nuovi oggetti del pensiero, a partire dai dati.

Richiamiamo alla mente tutte le riunioni compiute, e associamo le classi così ottenute: con un'astrazione successiva ci solleviamo al concetto generale di *classe* o *insieme*.

In un modo simile si possono generare i concetti astratti di *serie*, *corrispondenza*, *interferenza di classi*, ecc.; i quali venendo costruiti col puro esercizio dell'attività logica, quando ci si riferisca agli oggetti effettivamente pensati, possono ricevere il nome di *concetti puramente logici*.

Si noti espressamente che le operazioni costruttrici di codesti concetti non involgono nessun procedimento trascendente, ove ci si riferisca agli oggtti effettivamente pensati (il cui numero è finito). Soltanto in rapporto alla supposizione, si avrà luogo di estendere più tardi il significato dei concetti suddetti.

§ 13. **Tipi elementari della definizione.**

Fermiamoci un momento a vedere come la classificazione delle opera-

zioni logiche si rispecchi in una distinzione dei tipi elementari della definizione, subordinati ai concetti puramente logici.

Prenderemo a considerare, in modo speciale, tre tipi fondamentali: *le definizioni per riunione, per interferenza* e *per astrazione*.

La definizione del primo tipo è quella in cui s' introduce un oggetto come l'*insieme* di più elementi dati, o come la *serie* costituita da più oggetti ordinati.

Esempii: il *contorno* di un poligono è « l'insieme dei suoi lati »; una *folla* è « l'insieme degli uomini, che si trovano riuniti in un certo luogo », ecc. Una *fila* di alberi, una *successione* di avvenimenti sono serie composte di elementi, presi in un certo ordine.

La definizione per interferenza è in sostanza quella scolastica, della quale si dice « definito fit per genus proximum et differentiam specificam ». Essa consiste nel determinare una classe di oggetti come comune a due (o più) classi date.

Togliamo ad esempio dal FIORENTINO la definizione dell'eredità, che CICERONE dà nella Topica: l'eredità è un patrimonio ottenuto per la morte di alcuno, in virtù di un diritto.

Qui si considerano come date due classi di patrimonii, quelli avuti per diritto in qualsiasi modo, e quelli comunque ottenuti per la morte di alcuno; le eredità sono gli individui logici comuni alle due classi.

Altri esempii:

in Zoologia, le definizioni delle varie specie animali consistono nel determinare ciascuna di esse come interferenza di classi più ampie (esistenti o pensabili), dotate di certi caratteri:

in Geometria, la superficie d'un triangolo si definisce come l'interferenza dei semipiani limitati dai lati e contenenti i vertici opposti, ecc.

Più importante e meno nota è la definizione per astrazione, il cui ufficio fu messo in luce da GRASSMANN, HELMHOLTZ, MACH, MAXWELL, e, presso di noi, dal PEANO e dal VAILATI. Eccone il fondamento:

Essendo data una classe di oggetti, i quali (sotto il particolare aspetto per cui trovansi associati) si assumano come *uguali*, resta senz'altro definito il concetto astratto dell'individuo della classe.

Questo è in sostanza il processo implicito, secondo cui vengono definiti nel linguaggio tutti i termini astratti.

La definizione che Euclide dà del rapporto di due grandezze, è il più antico esempio a noi noto di una definizione di questo tipo. Essa consiste appunto nel dichiarare quand'è che due coppie di grandezze debbonsi riguardare aventi rapporti uguali, cioè come proporzionali. Dunque si può dire:

« Il rapporto di due grandezze (omogenee) è il concetto astratto della loro coppia, in quanto si consideri uguale ad ogni altra coppia di grandezze proporzionali ».

Data una classe di rette parallele, riguardando queste come uguali, cioè sostituibili (rispetto alla direzione), resta definito il concetto astratto della loro *direzione*. Così si può dire: direzione è il concetto astratto della retta in quanto si pensi come sostituibile da una sua parallela.

Nella economia, il concetto del *valore* si introduce con un processo analogo. Data una classe di merci permutabili, in un certo mercato, le quali vengono riguardate come uguali, resta definito per astrazione il loro valore; dunque il valore di una merce (in un mercato) è il concetto astratto di essa, in quanto si pensi come uguale a tutte le merci che con essa vengono scambiate.

Conviene aggiungere che la definizione per astrazione suppone dei fatti, come è facile riconoscere nell' ultimo esempio; invero se il valore d' una merce deve essere determinato bisogna riferirsi ad un mercato dove, entro un certo intervallo di tempo, le merci conservino tra loro rapporti di scambio invariabili.

Terminiamo queste considerazioni avvertendo la differenza che passa fra definizioni esprimenti operazioni sempre possibili, come la riunione e l'astrazione, e definizioni (come quella per interferenza) la cui possibilità è subordinata alla condizione che le classi interferite abbiano degli elementi comuni.

§ 14. **Rapporti logici costruiti e assiomi.**

Allorchè più oggetti dati vengono, in varii modi, riuniti in classi, o ordinati in serie, ecc., noi pensiamo fra gli oggetti stessi, le classi o le serie costruite, certi *rapporti logici*, che esprimono le operazioni compiute. P. es., se si hanno tre oggetti a, b, c e costruiamo la classe

$$D = (a\ b\ c),$$

diciamo che

$$a \textit{ appartiene } \text{a } D$$

o che

$$a \textit{ è in } D \text{ ecc.}$$

ed il rapporto così espresso significa che D è una classe formata riunendo a con altri elementi.

Parimente fra le classi

$$A \equiv (bcd) \qquad B \equiv (acd),$$

concepiamo un rapporto espresso dicendo che: le classi A e B hanno qualche elemento comune.

In un modo generale possiamo dire: *Le operazioni logiche compiute trovano la loro espressione attuale in certi rapporti che concepiamo fra gli oggetti dati e costruiti.*

Allorchè si ripensano insieme gli elementi e le classi (serie, ecc.) composte con essi, i loro rapporti logici si ripresentano sempre colle medesime caratteristiche d'invarianza, che già notammo appartenere agli oggetti del pensiero. A questo titolo i suddetti rapporti possono venire combinati mediante le operazioni fondamentali; in ispecie la riunione di più rapporti in un *sistema*, e l'interferenza di più sistemi di rapporti, vengono alla lor volta concepiti come *nuovi rapporti* fra gli oggetti dati e costruiti.

Ora vi è luogo a definire l'*equivalenza* (uguaglianza) di due rapporti o sistemi di rapporti; sono equivalenti due sistemi che esprimono le medesime condizioni del processo operativo; così, p. es., i due sistemi

a appartiene a D, b appartiene a D

e

la classe (ab) appartiene a D,

i quali dicono ugualmente che la classe D è stata composta riunendo a, b ad altri (eventuali) oggetti.

Operare sui sistemi di rapporti logici, riunendoli, interferendoli e sostituendoli con sistemi equivalenti, significa *dedurre*.

Il giudizio sulla equivalenza dei rapporti logici, e quindi le *regole della deduzione*, riposano sopra il riconoscimento di certe *leggi delle operazioni fondamentali*, le quali si traducono in certi rapporti dei concetti puramente logici (§ 12), cui si dà il nome di *assiomi*.

Esempi:

1) La *proprietà associativa* delle classi esprime la legge fondamentale della riunione: una classe composta si ottiene medesimamente riunendo insieme i componenti.

2) La *proprietà transitiva dell'eguaglianza* (secondo la denominazione dei logici matematici) esprime la legge fondamentale dell'astrarre cioè la « sostituibilità di un elemento ad un altro di una classe, rispetto al concetto astratto di questa ».

Importa avvertire che questo assioma, enunciato generalmente dicendo « due cose uguali ad una terza sono uguali fra loro », non è da confondere col principio d'identità (§ 17).

3) La *proprietà commutativa* del riunire, esprime una legge fondamentale di confronto fra la riunione, l'ordinamento e l'astrazione, cioè « se più

oggetti vengono ordinati in serie, nei diversi modi possibili, il concetto astratto della classe composta con codeste serie è l'insieme degli oggetti dati », ecc.

§ 15. **Proposizioni.**

La forma più comune dei rapporti logici, che la Logica grammaticale considera come tipica, è la *proposizione*. Perciò vale la pena di fermarsi un momento a riconoscere il processo operativo che così viene espresso.

Con una *proposizione singolare*

« *a* è *b* »,

dove il soggetto *a* denota un individuo determinato, si può esprimere che *b* è il concetto *astratto* di una classe ottenuta *riunendo a* con altri individui. Ad es., « Dante è poeta », significa che poeta è il nome astratto degli individui di una classe che contiene Dante.

In un modo analogo è chiaro come la riunione degli elementi di una classe (*a*) con altri elementi, in una più ampia classe (*b*), da cui nasce il concetto astratto *b*, possa significarsi colla *proposizione universale*

« ogni *a* è *b* ».

Invece mercè la *proposizione particolare*

« qualche *a* è *b* »,

il cui soggetto non è determinato, si riesce ad esprimere che due classi (*a*) (*b*) hanno degli elementi comuni; p. es., la proposizione « qualche mammifero è bipede » significa l'interferirsi della classe dei mammiferi con quella dei bipedi.

§ 16. **Rapporti logici dati.**

Cerchiamo di riassumere i resultati della critica precedente.

Se si considerano degli oggetti del pensiero, p. es., *a*, *b*, *c*, *d*, e su questi si opera (riunendoli, ecc.), il processo operativo trova la sua espressione in un sistema di rapporti, intercedenti fra le classi, serie, ecc., diciamo in generale fra gli oggetti o i concetti, da esso costruiti; e codesti rapporti si traducono ordinariamente mediante proposizioni. Il sistema anzidetto, preso nella sua integrità, permette di riconoscere le operazioni compiute; ma se si prendono da esso soltanto alcuni rapporti, questi esprimono *in parte* le condizioni del processo operativo.

Ora, accanto ai rapporti logici costruiti, noi pensiamo dei *rapporti logici*

dati (come ipotesi o come trasformazione di queste), i quali rivestono una forma affatto analoga, p. es., la forma di proposizioni. Sorge quindi la *questione inversa* di quella trattata innanzi, cioè, « se, in ogni caso, i rapporti logici dati fra oggetti del pensiero (sia, p. es., fra concetti), possano interpretarsi come condizioni di un processo associativo, col quale, partendo da elementi opportunamente determinati, si generino quegli oggetti ».

Esaminando più da vicino la cosa, ci s'imbatte tosto in una difficoltà fondamentale : se, per ogni sistema di concetti, si cerca d'interpretare i rapporti logici come condizioni di un processo associativo a partire da elementi dati, accade talvolta che il *numero di questi debba supporsi infinito*.

Un semplice esempio vien porto dal considerare i primi postulati della « retta » e del « piano », coi quali s'intende di definire questi enti come « classi di punti», costruite in guisa da soddisfare a certe condizioni [1].

Ora come possiamo ammettere *infiniti oggetti dati* al pensiero?

Finchè il senso che si accorda ad un oggetto *dato*, è quello di essere stato effettivamente *pensato*, è chiaro che un'infinità di oggetti non potrebbe ammettersi data, senza un processo mentale trascendente.

La cosa si presenta in un aspetto diverso quando, accanto agli oggetti *pensati*, si considerino gli oggetti *pensabili*, non più propriamente riconosciuti come *dati*, ma *supposti*.

Si abbia un certo sistema di concetti, tra cui intercedano alcuni rapporti logici; supponendo che i concetti stessi possano venir costruiti con operazioni logiche, a partire da certi elementi, essi si presentano come serie, classi, corrispondenze, ecc.

Se gli elementi dei nostri concetti sono stati una volta inizialmente pensati, i rapporti logici dei concetti medesimi, ci apprendono, come si è detto, a ricostruire *in parte* il processo con cui furono generati. Ma se si lascia cadere l'ipotesi di uno stato iniziale della mente in cui codesti elementi sieno stati pensati, il processo associativo supposto dai concetti ha ancora un significato : le serie o le classi (che ora possono contenere anche infiniti elementi) assumono il valore di *modi di determinare a priori l'ordine o la riunione degli oggetti del pensiero supposti*, tostochè questi vengano effettivamente *pensati*. Così, p. es., il concetto di una linea (orientata) L come serie di punti, ci dà un modo di ordinare i punti che sieno pensati sopra di essa; onde se si considerano su L tre punti A, B, C, resta determinato un modo di ordinarli in serie, che ci fa scegliere *una* delle sei permutazioni possibili ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, come quella in cui i tre elementi si succedono entro la supposta serie L.

[1] Cfr. ENRIQUES-FANO : « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. IX (1894) ».

§ 17. **Condizioni di possibilità dei concetti: principii logici.**

Ciò che abbiam detto intorno alla interpretazione dei rapporti logici dei concetti e alla supposizione di oggetti del pensiero mediante questi, vale sotto certe condizioni di *possibilità dei concetti*, implicitamente ammesse nelle considerazioni precedenti.

Importa di chiarire, sotto tale riguardo, il significato della supposizione psicologica. Ed a tal fine cominciamo dal richiamare l'osservazione che gli oggetti presi come elementi del processo logico, sono degli *invarianti* rispetto al movimento del pensiero, ed in ispecie rispetto alle operazioni associative e dissociative.

Le condizioni d'invarianza vengono espresse dai *principii logici*, relativi alle tre *intuizioni fondamentali* di *prima* e *poi* (ordine temporale), *identico*, *distinto*, che si ritrovano in fondo ad ogni pensiero.

Si hanno, come è noto, i tre principii seguenti:

1) il principio d'*identità*,
2) il principio di *contraddizione*,
3) il principio del *terzo escluso*.

Il primo principio dice che l'oggetto può essere *riconosciuto* come qualcosa d'identico, attraverso rappresentazioni successive. Il secondo principio esclude che due oggetti, distinti in una data rappresentazione, sieno pensati come identici in una successiva. E finalmente il terzo principio afferma che fra due oggetti, contemporaneamente pensati, ha luogo sempre il giudizio d'identità o di distinzione.

Nel loro insieme i principii conferiscono agli oggetti del pensiero una realtà psicologica, indipendente dal tempo, e sono quindi il presupposto di una Logica simbolica, la quale miri a rappresentare, come insieme di *rapporti attuali*, il processo *genetico* delle operazioni logiche.

Perciò manca la possibilità di rappresentare simbolicamente codesti principii, i quali non esprimono proposizioni fondamentali, di cui il ragionatore tenga conto aggiungendole ai postulati delle singole teorie, ma, come si è detto, i *requisiti degli oggetti* elaborati nel processo logico. La scrittura $a = a$ non designa in alcun modo il principio d'identità, bensì un giudizio tautologico insignificante!

Le condizioni d'invarianza, espresse dai principii logici, vengono *volontariamente fissate* per ogni oggetto, che sia pensato come tale; « pensare un oggetto » significa appunto determinarlo e distinguerlo come riconoscibile, cioè inibire il corso delle associazioni inconscie, che tenderebbero a modificare la rappresentazione.

Il fatto che gli oggetti una volta identificati dal pensiero, si mantengono

invarianti rispetto alle operazioni logiche, è implicato dalle leggi di queste, espresse negli assiomi. I rapporti logici costruiti significano, in ultima analisi, che : *determinate operazioni conducono a riconoscere certe identità o certe distinzioni.*

Si può esprimere il fatto sopra indicato dicendo che « i rapporti logici costruiti a partire da oggetti pensati sono a priori *compatibili* », o che « le operazioni costruttrici sono *possibili*, senza mai condurre ad una *contraddizione* ».

Ora, se si tratta di oggetti, non effettivamente pensati, ma supposti come elementi di un concetto, la volontà che pone questo come dato, subordina e limita, in diversi modi, le determinazioni ulteriori che vengono a identificare e distinguere quegli oggetti, non ancora apparsi sulla scena del pensiero. E la *compatibilità* delle limitazioni, espresse dai rapporti logici definienti il concetto, ossia la compatibilità di questi rapporti, costituisce una condizione per la possibilità del processo generativo dei rapporti medesimi.

Il significato della supposizione è dunque questo, che « lo sviluppo deduttivo dei rapporti dati non conduca mai ad una *contraddizione* », la quale mostrerebbe la non invarianza di qualche oggetto supposto, relativamente al processo associativo postulato, e quindi l'impossibilità di pensare quello come elemento di questo.

Pertanto :

I principii logici esprimono, non solamente i requisiti primitivi d' invarianza degli oggetti pensati, il rispetto alle operazioni associative, ma anche le condizioni di possibilità dei concetti, cioè la possibilità di rappresentarsi i rapporti logici dati fra questi, come costruiti a partire da elementi supposti.

§ 18. **Compatibilità dei postulati di una teoria.**

In qual modo si potrà accertarsi che dati rapporti logici, definienti un concetto o un sistema di concetti, sono compatibili?

Questo è il problema che si affaccia all'inizio di ogni teoria deduttiva, fondata sopra un sistema di postulati. E la difficoltà è propria essenzialmente del caso in cui non si possa rappresentarsi i concetti come generati mediante un numero finito di elementi.

Si può cercare un fondamento al giudizio richiesto :

1) nell'*esperienza*
   a) fisica
   b) o. psicologica;
2) nella *intuizione* o visione immaginativa dei concetti;
3) in una *dimostrazione logica*.

Esaminiamo il significato e il valore di questi tre ordini di prove.

1) *a*) Benchè un concetto possibile non debba necessariamente rappresentare qualcosa di reale, si ammette all'opposto che « il concetto di ciò che

è reale sia possibile »; si dice appunto in questo senso che « il reale non può essere contraddittorio ». In base al principio suddetto si cerca di giustificare la compatibilità di un sistema di rapporti (ipotetici) mostrando coll'esperienza che questi corrispondono ad una realtà, per una *qualche interpretazione* convenzionale arbitraria data ai concetti.

Il valore della prova risiederebbe in questo, che gli invarianti reali (cap. II) possono venire rappresentati come oggetti del pensiero.

Ma vi sono da fare alcune riflessioni.

Anzitutto l'invarianza delle cose reali è soltanto approssimativa, e quindi non bene determinata la costruzione degli oggetti del pensiero corrispondenti, sicchè bisognerebbe almeno distinguere fra *esperienze qualitative* e *quantitative* (cfr. la seconda parte di questo capitolo).

Inoltre le esperienze effettivamente praticabili, in numero finito, non valgono da sole come prova di realtà; occorre, come vedremo, una interpretazione di esse, e questa è subordinata ad una *rappresentazione mediante concetti*. Sotto questo riguardo, il cercare una prova sperimentale (fisica) della compatibilità logica di un sistema d'ipotesi può apparire un circolo vizioso, poichè la compatibilità è generalmente una condizione premessa alla verifica; tuttavia resta sempre che il mancare a codesta condizione impedirà il successo delle verifiche sufficientemente proseguite. Inoltre il tentativo di una dimostrazione fisica della compatibilità di certi rapporti, conduce ad uno sviluppo deduttivo di questi, e quindi ad esperire la prova 1) *b*).

1) *b*) Appunto questa prova consiste nel riconoscere che uno sviluppo deduttivo *sufficientemente* proseguito, in sensi diversi, non ha condotto a contraddizioni.

Nonostante gli errori a cui l'applicazione del criterio va soggetta, questo ha un valore altamente probabile quando sia adoperato con una larga critica comparativa, tenendo conto degli insegnamenti che emergono dalla storia della Scienza.

2) L'appello alla visione immaginativa, se pure urti in difficoltà d'interpretazione che inducono in errore spiriti poco critici, garantisce la possibilità dei concetti, in quanto implica tutto un processo formativo di associazioni ed astrazioni, che tendono ad eliminare la contraddizione dalle ipotesi elaborate. L'intuizione rappresenta in questo senso una larga esperienza psicologica .

3) La dimostrazione logica costituisce il solo mezzo di prova *rigorosamente certa*, ma ha un valore soltanto *relativo*. Si tratta di riconoscere che, essendo dati come possibili certi concetti, se ne possono logicamente costruire altri, onde dalla supposta compatibilità dei rapporti che definiscono i primi segua la compatibilità dei rapporti definienti i secondi.

Mettiamo a riscontro queste vedute collo sviluppo storico dei problemi che le hanno suggerite, e degli apprezzamenti che vi si riferiscono.

La questione della compatibilità di un sistema di postulati si è affacciata in Geometria, in seguito alla costruzione delle teorie non-euclidee (cfr. cap. IV). I fondatori di queste trassero prima di tutto la convinzione della compatibilità logica delle loro ipotesi, dalla circostanza di non incontrare contraddizioni in uno sviluppo relativamente avanzato.

Ma la questione fu definitivamente chiusa solo quando si pervenne a dimostrare che la compatibilità logica delle ipotesi non-euclidee è una conseguenza di quella delle proprietà fondamentali dei numeri interi, supposte dalle operazioni aritmetiche, o di quella dei postulati della Geometria euclidea.

Negli sviluppi critici più recenti intorno ai principi della Geometria, si è ricorso ugualmente ai punti di vista suddetti; sopratutto la scuola tedesca, da RIEMANN in poi, si è riattaccata all'Aritmetica, mentre la scuola geometrica italiana, dopo il « Saggio » di BELTRAMI ha trattato le questioni di compatibilità dei postulati ricorrendo a varie interpretazioni concrete, ed in ispecie a quelle che vengono suggerite dalla intuizione dell'ordinario spazio di Euclide.

È chiaro che l'esperienza psicologica (consciamente eseguita o contenuta nella visione immaginativa dei concetti) garantisce ugualmente che l'Aritmetica e la Geometria euclidea sono esenti da contraddizioni; inoltre la possibilità logica dell'una si riduce a quella dell'altra mediante l'introduzione delle coordinate; sicchè sotto questo aspetto le prove fornite appariscono equivalenti. Invece sotto l'aspetto fisico le esperienze che verificano i rapporti contenuti nell'Aritmetica hanno su quelle geometriche il vantaggio di essere qualitative, cioè di riferirsi a rapporti che possono variare soltanto in modo discreto.

Ma vi è un altro punto di vista ,da cui la supposizione della compatibilità dell'Aritmetica appare come il postulato più ristretto, fra quelli che possono assumersi per stabilire la possibilità dei concetti.

§ 19. **Fondamenti dell'Aritmetica.**

Ci proponiamo appunto, di discutere qui brevemente, le questioni che riguardano i fondamenti dell'Aritmetica e la possibilità della supposizione che questa richiede. Terremo presenti all' uopo le critiche di DEDEKIND, PEANO, ecc., ed in ispecie quelle del Peano, che ci sembrano le più perfette sotto l'aspetto logico ed algoritmico, ma che fanno volutamente astrazione dai problemi di ordine psicologico o filosofico.

Là *numerazione* si può basare sopra un presupposto *fisico*. Si prendano come *date* più *serie* di oggetti

$$a,\ b,\ c\ \ldots.$$
$$m,\ n,\ p\ \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

delle quali si denotino i termini generali risp. con A, M,...

Suppongasi per ciascuna serie che:

1) ogni oggetto abbia un successivo determinato;

2) ogni oggetto, all'infuori di uno (*il primo*), che non succede ad altri, abbia un determinato precedente;

3) valga la proprietà seguente (*principio d'induzione matematica*) [1]: se una classe di oggetti è tale che insieme ad ogni A contenga il suo successivo, e se contiene a, essa conterrà tutti gli elementi della serie a, b, c,... (analogamente per le altre serie).

Possiamo formare le serie seguenti:

$$\begin{array}{cccc} (a) & (ab) & (abc) & \ldots. \\ (m) & (mn) & (mnp) & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{array}$$

Riunendo in una classe (composta) gli oggetti (classi) che si trovano in una medesima colonna del quadro precedente, definiamo, per astrazione, successivamente i numeri

$$1,\ 2,\ 3,\ldots.$$

Lo sviluppo delle operazioni aritmetiche si lascia quindi fondare sopra gli assiomi logici e sui postulati 1) 2) 3).

L'ufficio di questi postulati e segnatamente del terzo, che per la prima volta Peano ha considerato come una condizione definitrice del sistema dei numeri, consiste nel ritenere *a priori* possibili senza contraddizione, le deduzioni ottenute a partire dagli infiniti elementi e rapporti che vengono supposti nel concetto generale di numero (intero).

Ora è specialmente importante per lo scopo nostro avvertire, che una serie come la a, b, c,..., può essere supposta all'infuori dell'esperienza fisica per mezzo di certe *determinazioni generali* che involgono una successione di atti del pensiero illimitatamente proseguibile. P. es., si suppongano dati due oggetti a, α, e si costruisca il nuovo oggetto

$$b \equiv (a\alpha),$$

[1] Non si deve confondere l'*induzione matematica*, per cui si argomenta da n ad $n+1$..., coll'*induzione completa* aristotelica, cui si è accennato nel § 1, e per la quale si argomenta del concetto astratto di una classe ciò che si suppone noto per ciascuno degli oggetti che la compongono. L'induzione matematica è stata scoperta molto più tardi; secondochè il VAILATI mi comunica, essa risale a MAUROLICO (1550).

ottenuto dalla loro riunione; si costruiscano analogamente

$$c \equiv (b\alpha), \quad d \equiv (c\alpha) \ldots.$$

La serie

$$a, b, c \ldots$$

così psicologicamente definita, soddisfa alle condizioni 1), 2), 3).

Anche in base alla proprietà riflessiva del pensiero si riesce a costruire una serie analoga :

$$a\ b, \equiv \text{pensiero di } a,\ c \equiv \text{pensiero di } b, \text{ ecc.}$$

Notisi che la prima di queste costruzioni convenzionali conduce ad un sistema *diadico* di numerazione, dove tuttavia la *scrittura* ordinata delle cifre esige un presupposto fisico (geometrico).

Dalle cose dette si desume che la supposizione fondamentale dell'Aritmetica può essere appoggiata, anzichè ad una realtà fisica, ad una realtà psicologica, cioè al fatto che si possono illimitatamente ripetere certi atti del pensiero subordinandoli a determinazioni generali, per modo da costruire delle serie che soddisfino alle condizioni 1), 2), 3).

Pertanto l'Aritmetica, richiedendo solo un postulato psicologico da aggiungersi alle leggi associative (assiomi) si può in un certo senso considerare come una parte della Logica pura, o come un prolungamento di questa, dove si completino gli assiomi col *principio d'induzione matematica*, inteso come una *proprietà fondamentale delle serie psicologicamente costruite* ([1]).

ottenuto dalla loro riunione; si costruiscano analogamente

$$c \equiv (b\alpha), \quad d \equiv (c\alpha) \ldots.$$

La serie

$$a, \; b, \; c \ldots$$

così psicologicamente definita, soddisfa alle condizioni 1), 2), 3).

Anche in base alla proprietà riflessiva del pensiero si riesce a costruire una serie analoga :

$$a \; b, \equiv \text{pensiero di } a, \; c \equiv \text{pensiero di } b, \text{ ecc.}$$

Notisi che la prima di queste costruzioni convenzionali conduce ad un sistema *diadico* di numerazione, dove tuttavia la *scrittura* ordinata delle cifre esige un presupposto fisico (geometrico).

Dalle cose dette si desume che la supposizione fondamentale dell'Aritmetica può essere appoggiata, anzichè ad una realtà fisica, ad una realtà psicologica, cioè al fatto che si possono illimitatamente ripetere certi atti del pensiero subordinandoli a determinazioni generali, per modo da costruire delle serie che soddisfino alle condizioni 1), 2), 3).

Pertanto l'Aritmetica, richiedendo solo un postulato psicologico da aggiungersi alle leggi associative (assiomi) si può in un certo senso considerare come una parte della Logica pura, o come un prolungamento di questa, dove si completino gli assiomi col *principio d'induzione matematica,* inteso come una *proprietà fondamentale delle serie psicologicamente costruite* (1).

B - L'applicazione della Logica.

§ 20. Problemi fondamentali.

Dopo avere esaminato i problemi che si riferiscono all'aspetto logico del procedimento conoscitivo, nella sua espressione subiettiva più perfetta, ci volgiamo a considerare il medesimo procedimento nei rapporti colla realtà. Dallo studio della Logica pura passiamo dunque alla sua applicazione.

Già accennammo all'ufficio che il ragionamento deduttivo ha nell'acquisto delle conoscenze, come *istrumento di trasformazione delle ipotesi.* Ora

(1) La questione della compatibilità dei postulati dell'Aritmetica è stata messa all'ordine del giorno dalle comunicazioni di D. HILBERT ai recenti congressi di matematiche (Parigi, 1900; Heidelberg, 1904). Hilbert ricerca una dimostrazione logica; ma noi non comprendiamo bene in qual senso sia da intendere la veduta dell'illustre geometra.

Alle comunicazioni anzidette si collega uno scritto polemico di A. PADOA, che sostiene (senza distinzione delle esperienze) il punto di vista empirico; alle opinioni di questo autore si contrappongono in parte le osservazioni del nostro precedente paragrafo.

conviene esaminare più da vicino questa trasformazione e dilucidare due problemi, l'un l'altro subordinati, che concernono la valutazione delle teorie scientifiche.

1) Allorchè alcune ipotesi, poste in un ordine di fatti, vengono trasformate col ragionamento, si assume come *evidente* che la realtà o meno delle premesse porti quella delle conseguenze; allo stesso titolo si assume la supposizione inversa, se si tratti di deduzioni invertibili, cioè se le ipotesi date e le trasformate sieno *logicamente equivalenti*.

Una tale supposizione, ove si adotti senza restrizioni, attribuisce alla deduzione un valore reale, ed implica che il suo impiego sia incondizionatamente legittimo in ogni ramo della Scienza. Ma è il caso di investigare quanto questo giudizio sia giusto.

A tale scopo ci proponiamo il problema generale « come sia possibile che il processo logico porga una rappresentazione del reale », cioè sotto quali condizioni ed in qual modo avvenga che la trasformazione dei concetti (determinata secondo leggi subiettive) si rispecchi in una trasformazione dei rapporti reali, implicante un legame di coesistenza di questi.

2) Il secondo problema, subordinato al primo, concerne il modo di verificare un dato sistema di ipotesi, concatenate in una teoria; si tratta dunque di rispondere alla domanda « se, ed entro quali limiti, una data teoria deduttiva sia atta a rappresentare un certo ordine di rapporti reali ».

§ 21. **Rappresentazione logica e postulato della conoscenza.**

Diciamo anzitutto del primo problema.

La possibilità di rappresentare logicamente la realtà deve essere intesa in questo senso, che: agli invarianti dell'esperienza, che costituiscono le cose reali (oggetti e rapporti), possonsi far corrispondere gl'invarianti (oggetti) del pensiero, per modo che alle coesistenze e successioni invariabili di quelle corrispondano classi e serie di questi.

Il postulato della conoscenza enunciato nel cap. II afferma già in via approssimata codesta generica possibilità; ma è chiaro che se si assume la rappresentazione logica del reale come illimitatamente proseguibile, si viene a prendere il postulato suddetto in un senso rigoroso, che oltrepassa quanto è richiesto come fondamento delle conoscenze necessarie alla vita.

Supponiamo, per un istante, che codesto senso rigoroso sia ricevibile, cioè che possa ammettersi una esperienza logicamente disposta, condotta ad un grado assoluto di perfezione, e domandiamoci quindi quali condizioni vengano in tal modo supposte. Siamo tratti allora, con KANT, a prendere le intuizioni fondamentali di *sostanza* e di *causa* come *rapporti necessari ed universali*, contenenti appunto le *condizioni a priori per la possibilità dell'esperienza*. Alle

quali si collegano dei *giudizii sintetici*, parimenti *a priori*, cui verrebbe conferita *realtà obiettiva* dal fatto di codesta possibilità.

Ma le conclusioni di siffatta critica ci sembrano contestabili per i motivi seguenti: le rappresentazioni di sostanza e di causa, prese in un senso assoluto, non costituiscono condizioni a priori per la possibilità dell'esperienza, *come essa* è, nelle sue forme imperfette e non rigorose, bensì soltanto per un'*esperienza tipica*, dotata di un valore probativo rigoroso, la cui possibilità non sussiste.

La possibilità di una rappresentazione logica del reale, siccome essa si manifesta progressivamente nella Scienza, non implica una forma di conoscenza in alcuna sua parte compiuta, dimodochè le *conoscenze a priori* che a quella si volessero collegare non ne risulteranno provate. Il dilemma che Kant pone fra la loro accettazione e lo scetticismo è irricevibile, appunto perchè contrappone una Scienza assolutamente razionale ad una assoluta ignoranza, laddove i varii *gradi* del sapere non giungono mai ad un assetto rigoroso. Essere l'esperienza possibile in genere, subordinatamente a criteri logici, non significa nulla di preciso finchè non si determini quali modi d'esperienza sieno resi possibili dal verificarsi di certe condizioni o di certi fatti.

E questo giudizio è evidentemente a posteriori.

Il postulato della conoscenza, inteso nel suo vero senso positivo, implica soltanto una *invarianza relativa e non rigorosa* di certi oggetti dell'esperienza, denotati come cose reali; la rappresentazione logica della realtà suppone un grado d'invarianza (teoricamente rigoroso) che, in ogni singolo caso, dipende dall'estensione dello sviluppo deduttivo. Di qui un'antinomia che si risolve in un limite all'applicazione della Logica.

A rendere più precise le affermazioni precedenti, e ad approfondire la questione, conviene cominciare da una critica delle rappresentazioni di sostanza e di causa.

§ 22. **Sostanza: materia ed energia.**

L'idea che ci formiamo della *sostanza* o di un sostrato invariabile dei fenomeni, esprime la nostra credenza che « vi siano nella realtà certe coesistenze fenomeniche, per cui taluni caratteri sensibili si ritrovano in aggruppamenti *uguali*, a costituire degli oggetti », e quindi che « talune somiglianze di caratteri ne implichino altre ». Appunto questa credenza trovasi a fondamento della rappresentazione delle cose reali a mezzo di concetti, costruiti per astrazione da classi di elementi.

Ora l'idea generale di sostanza si concreta nel riconoscimento di alcuni invarianti, che nell'ordine delle idee kantiane dovrebbero prendersi in un senso rigoroso a priori.

Questi invarianti sono, per la Fisica moderna, la *materia* e l'*energia*.

Anzi KANT stesso dà come esempio di giudizio sintetico a priori, il principio che « in ogni cambiamento del mondo corporeo la qualità di materia resta invariabile ».

Che cosa significa questo principio?

Se si vuol riconoscere in esso una effettiva conoscenza sintetica, bisogna che la « quantità di materia » sia anzitutto positivamente definita. E dove ciò venga fatto, p. es. sulla base del « peso », l'invarianza della materia esprime soltanto il resultato delle esperienze di LAVOISIER; se si adotta invece la definizione dinamica della quantità di materia (cfr. cap. V), il suddetto enunciato viene ad esprimere un rapporto più astratto, quale risulta dal confronto di esperienze estese, in ispecie di quelle chimiche sopra citate e delle esperienze sul pendolo di BESSEL (proporzionalità della massa al peso in ogni luogo della superficie terrestre).

Ma tutte queste esperienze sono soltanto approssimative, ed il principio, nella sua forma esatta, vi aggiunge la supposizione di una verifica più precisa, tostochè sieno eliminate o corrette talune cause d'errore. Con qual diritto si pretenderà che codesta supposizione *debba* necessariamente verificarsi? Una siffatta pretesa è tanto lontana da apparire universalmente giustificata che alcune delicate esperienze eseguite recentemente da LANDOLT, e ripetute da HEYDWEILLER, tendono anzi a mettere in dubbio l'invariabilità del peso nelle reazioni chimiche; in una soluzione di solfato nell'acqua si crede aver osservato una perdita sensibile, benchè inferiore a 0,000.001 [1].

Nulla osta che queste conclusioni divengano così luminosamente provate da imporsi come fatto accertato. Che cosa si dirà allora della invarianza della materia?

Si può salvare il principio (come accenna lord RALEIGH) rigettando il dubbio sulle esperienze di BESSEL; è un'ipotesi plausibile che tuttavia andrà soggetta pur essa al controllo dell'esperienza.

Ci sono anche altre risorse possibili. Si può, p. es., con Heydweiller, ricorrere all'ipotesi di una diversa *radioattività* della materia; la materia non sarebbe più rigorosamente invariante nelle reazioni chimiche, se non si aggiunge al resultato dei consueti processi di misura *qualcos'altro*, che si riferisce ai corpi partecipanti al fenomeno, ma si manifesta fuori ed anche lontano da questi. Ma con ciò in primo luogo si cambia il significato del principio di Lavoisier, in secondo luogo si viene anche a palesare l'impossibilità di

[1] La recente comunicazione di LANDOLT all'Accademia di Berlino (1908) riferisce invece l'ultima conclusione dei suoi studii, che il principio di LAVOISIER è bene verificato nell'ordine degli errori di osservazione non eliminabili. Tuttavia la discussione sollevata dalle precedenti ricerche conserva il suo interesse filosofico. (Aggiunta alla 2ª edizione).

assegnargli un significato rigoroso, poichè non si potrebbe limitare le radiazioni di un corpo ad una regione dello spazio accessibile all'esperienza.

Se si riconoscono ad ogni modo le ultime conclusioni come evidenti, il carattere a priori del principio della materia non può più essere sostenuto se non da chi scorga in esso una semplice *condizione definitrice* della quantità di materia; ed in questo senso il principio serberà ancora un valore sintetico a priori, ove venga preso come la supposizione che *esista* un oggetto, soddisfacente rigorosamente al requisito d'invarianza postulato.

Ma appunto codesta supposizione trascendentale si rivela priva di significato, per le ragioni tante volte ripetute; a che cosa si riduce dunque una condizione definitrice, cui non corrisponde alcun oggetto fisicamente possibile?

Di siffatto modo di considerare le cose resta questo, che: nel momento in cui l'esperienza sembri infirmare l'esattezza del principio, il resultato già acquisito come conoscenza parziale diventa il punto di partenza di nuove ipotesi correttrici, tendenti a cogliere una invariabilità più rigorosa. E codesto tentativo si effettua cercando di conservare formalmente l'espressione del rapporto, palesatosi inesatto, in accordo a quel *principio di permanenza formale*, dove PEANO ravvisa una *economia* delle espressioni scientifiche.

Sotto questo aspetto soltanto ci sembra giusta la veduta di H. POINCARÈ che considera certi principii come pure *convenzioni*. Mentre il vero valore conoscitivo ed euristico dei principii stessi risiede per noi in quel variabile contenuto di *supposizioni* reali, che tendono a fissarne il significato fisico, determinandosi ad ogni momento della elaborazione scientifica.

Pertanto nella idea generale della sostanza incontriamo soltanto quella fiducia generica che ci spinge a complicare un rapporto *poco variabile*, con qualche elemento attinente alla variazione, ricercando qualcosa di *più fisso*.

La stessa conclusione emerge chiaramente dall'esame del principio della conservazione dell'energia.

MAYER ha scoperto che vi è un equivalente dinamico del calore, sicchè si è condotti a ritenere costante, per ogni *sistema isolato*, la somma dell'energia cinetica e di posizione colla quantità di calore.

Ma la legge così espressa non si verifica ove intervengano fenomeni di altra natura: elettrici, magnetici, fotici, ecc. Siamo quindi indotti a modificarla, ricercando in questi fenomeni un qualche elemento che, nelle trasformazioni termiche o dinamiche, abbia un rappresentante quantitativo invariabile. Il principio dell'energetica adempie così in una seconda fase del suo sviluppo un ufficio paragonabile a quello di una condizione definitrice. Ma esso acquista effettivamente un senso soltanto in una terza fase, quando sia fissato che cosa

si deve intendere per energia elettrica, magnetica, fotica, chimica, ecc., e si riesca quindi ad esprimere un rapporto fisico più complesso ed integro.

Non si può pretendere che questo rapporto assuma mai un valore rigoroso. E basta notare come nell'energia totale di un sistema entri l'energia di posizione per vedere che non esistono sistemi perfettamente isolati. La ricerca di un tale sistema ci condurrebbe a considerare l'intiero universo nella sua infinità. Ma quale senso avrebbe mai l'affermare che l'energia dell'universo è costante, se essa è, come appare presumibile, infinita?

Ricapitolando, il significato e il valore di quei principii, che si riattaccano all'idea di qualcosa di sostanziale, sembra essere questo:

1) il riconoscimento *relativo* ed *approssimato* di un rapporto reale *invariabile* o, se si vuol essere esatti, *poco variabile*;

2) una fiducia generica che dietro il rapporto suddetto, e come integrazione di esso, possa scoprirsi qualcosa di *più fisso*;

3) la supposizione concreta che nei varii casi codesta correzione possa ottenersi tenendo conto di tali e tali altri dati sensibili, e verificarsi eliminando, per via di medie, ecc., certe cause d'errore.

Il primo aspetto risponde alla veduta dommatica della Scienza acquisita, nella quale si espone il resultato delle esperienze fatte; nel secondo e nel terzo aspetto c'è l'espressione di una volontà, che anticipa l'esperienza con una *supposizione* sempre più determinata e significativa rispetto a nuove esperienze possibili.

§ 23. **Causa.**

Anche dal rapporto di causa, positivamente inteso, esula ogni idea di rigorosa invariabilità.

Quando si dice che *causa* ed *effetto* sono fenomeni succedentisi invariabilmente, si sottintendono sempre *certe condizioni*. E se può essere opportuno di complicare la causa tenendo conto delle condizioni *notevoli*, in cui si riscontra il rapporto di successione, è chiaro che vi è in ciò una *scelta relativa* alla *frequenza* o all'*interesse* che certe condizioni presentano in confronto ad altre. Se si pretendesse di spingere la complicazione alle sue ultime conseguenze, il rapporto di causa perderebbe ogni significato, perchè nella sua forma assoluta ci direbbe che « ogni fenomeno è l'effetto dello stato precedente dell'universo » e quindi che « per assistere alla ripetizione esatta del fenomeno occorre riprodurre il suddetto stato »!

È assai difficile precisare i criterii di scelta, che tendono a determinare in ogni ordine di fatti il concetto della causa. Mentre, sotto l'aspetto logico astratto, si può ravvisare in codesta scelta una libera *convenzione* (conformemente alla veduta affacciatasi nella recente filosofia francese), quando si riguardi l'aspetto più essenziale della questione, si sarà tratti a distinguere:

1) Le implicite *supposizioni*, per le quali si assume che la variazione di certi elementi non importi una sensibile variazione del fenomeno di cui si discute: così, p. es., quando nello studio dei fenomeni fisici sulla terra si prendono come condizioni immanenti i rapporti astronomici del nostro globo (il che in taluni ordini di fatti può risultare smentito dal confronto delle esperienze ed esigere una conseguente correzione).

2) Le *condizioni* che volontariamente circoscrivono il fatto entro i limiti di certe variazioni *interessanti*, p. es. di quelle che cadono entro il dominio della volontà, ecc.

Nella Fisiologia, la vita e l'integrità degli organi costituisce l'insieme delle condizioni che prendiamo come fisse, quando studiamo il determinismo di certe funzioni; per modo che l'esperienza fisiologica urta in una grave difficoltà, ove tali condizioni vengano da essa modificate. Per questo motivo appunto le esperienze di estirpazione diretta dei lobi cerebrali riescono difficili ad interpretarsi, in rapporto al problema della localizzazione, dovendosi tener conto dello choc nervoso che sussegue all'atto operativo, e delle funzioni vicarie sopravvenienti.

Nelle scienze giuridiche, si tende a limitare il concetto della causa a ciò che si riattacca all'attività umana, appunto perchè su di essa interessa di agire.

La teoria della *responsabilità* che si può considerare come classica, fa direttamente appello al carattere volontario delle nazioni, sia che tratti di *dolo* o di *colpa* (negligenza). Questa veduta sembra oggidì sorpassata nella dottrina. Quando, p. es., si collega una responsabilità ai danni cagionati dall'esercizio di una vasta attività economica, non si può propriamente parlare di colpa se non a titolo di finzione giuridica, onde sembra più adeguata la veduta che, tenendo conto dei resultati statistici, riguarda, in simili casi, un danno (non specificato) come conseguenza diretta dell'esercizio suddetto. Ad ogni modo non si esce qui dalla considerazione del fattore volontario, su cui la legge viene ad agire in senso economico.

In altri casi però non è ugualmente certo che convenga di restare entro questi limiti; e d'altra parte, accanto alle cause volontarie delle azioni, sembra anche giusto il tener conto degli elementi obiettivi capaci di agire come determinanti (come, per es., l'aumento della probabilità del danno in seguito ad una data azione). Il problema della responsabilità è complesso e le speculazioni del nostro VENEZIAN, e quelle dei filosofi tedeschi (SIGWART, KRIES, ecc.), tendono a metterne in luce varii aspetti. Noi non intendiamo di procedere più innanzi in siffatte questioni; basti avere accennato alla veduta che si tratta di scegliere fra le cause, in vista di un *interesse sociale*.

Alle osservazioni precedenti altre se ne aggiungono a mostrare come sia difficile definire precisamente il concetto della causa.

A prescindere dall'aspetto psicologico della rappresentazione, che più tardi avremo luogo di prendere in esame, qualche esempio vale ad indicarci che il rapporto causale implica, nel comune intendimento, qualcosa di più di una successione costante. Infatti la successione delle notti ai giorni non viene concepita come un nesso di causa, ritenendosi, in base alle conoscenze astronomiche, la possibilità di un giorno (realizzato sopra un altro pianeta) che permanga eterno, senza essere seguito dalla notte.

L'esempio sopra addotto si trova interpretato talvolta in questo senso: si ritiene che il rapporto causale debba consistere in una successione invariabile non *invertibile* [1]; in mancanza di questo requisito avremmo casi di causazione impropria. Ma il criterio molto semplice non ci sembra adeguato alla distinzione che si ha in vista, poichè, ad es., fra l'uovo e la gallina, nonostante il reciproco avvicendarsi, si può porre (nell'uno e nell'altro senso) un rapporto di dipendenza causale.

Sembra piuttosto il caso di dire che la successione delle notti ai giorni, costante sulla terra, non è pensata come *invariabile*, rispetto alla varietà delle condizioni richieste da un tale ordine di fenomeni.

In conclusione il *postulato della causa* può essere presso a poco determinato come segue:

Per ogni classe di fenomeni che, delimitati in modo opportuno, possano ritenersi astrattamente *uguali*, si ammette di poter riconoscere in generale diversi gruppi di antecedenti riproducibili (cause), a cui i fenomeni suddetti susseguano *invariabilmente* quando

1) si osservi la riproduzione delle cause;
2) o si realizzino queste volontariamente;

e ciò con un grado di *approssimazione*, che dipende dai *limiti* a cui si estendono le osservazioni o in cui si assume come arbitraria la produzione delle cause; approssimazione che può rendersi sempre più grande relativamente ai limiti suddetti, quanto più si complichino le cause, tenendo conto di antecedenti notevoli dei fenomeni dati.

§ 24. **Ricapitolazione.**

Colle considerazioni precedenti abbiamo chiarito il significato *relativo* e *non rigoroso* degli invarianti reali. La rappresentazione logica della realtà è dunque da intendere nel medesimo senso; alla approssimata invariabilità fisica delle coesistenze e successioni reali si fa corrispondere l'invarianza logica (rigorosa) degli oggetti del pensiero, e della loro riunione o del loro ordinamento come elementi dei concetti.

[1] Così appunto il FIORENTINO spiega l'attributo di « incondizionato » che STUART MILL dà all'antecedente causale.

Così la rappresentazione concettuale appare, rispetto alla realtà, un'*astrazione*, per cui un insieme di oggetti viene *isolato col pensiero da tutte le condizioni complicatrici*, o fattori di variazione. E questa astrazione implica un *atto volontario di supposizione*, in cui già abbiamo ravvisato come la premessa al riconoscimento del fatto scientifico, che si compie colla *verificazione*.

È in nostro arbitrio di costruire i concetti rappresentativi di un gruppo di fatti, astraendo da quelle qualsiasi condizioni complicatrici che nelle prime osservazioni appaiono trascurabili, e di procedere deduttivamente su questa base; ma i rapporti così dedotti hanno soltanto una realtà ipotetica, essi si troveranno veri soltanto entro i limiti in cui gli elementi trascurati non importano una variazione sensibile.

L'ipotesi che l'invarianza dei rapporti sostanziali e causali apparterrebbe rigorosamente ai fatti concepiti, se non si fossero isolati dalle condizioni concomitanti, significa soltanto che gli errori inerenti alla rappresentazione concettuale si correggono, i limiti della rappresentazione si estendono nei riguardi della verità delle conseguenze dedotte, quanti più elementi reali si facciano entrare nei concetti rappresentativi. L'*universalità* delle rappresentazioni di sostanza e di causa, non ha alcun senso fuori di questa interpretazione.

§ 25. **Il valore reale dei principii logici.**

Le precedenti considerazioni ci avviano a discutere il problema che concerne il significato reale dei principii logici.

Si tratta di un'antica questione già dibattuta nella filosofia greca tra gli ELEATI e gli ERACLITEI, ed in altra veste rinnovata ai nostri tempi fra HEGEL e HERBART.

Quando consideriamo i principii d'identità e di contraddizione come riferentisi ad oggetti fisici, noi veniamo ad affermarne l'immanenza, almeno sotto il punto di vista secondo cui essi vengono concepiti. Ragionare su di una cosa qualunque è supporre che essa rimanga invariabile.

Tale è il pensiero della scuola d'Elea. La quale viene naturalmente condotta a proclamare l'immanenza del mondo, conforme alla permanenza dei concetti nel nostro spirito, e, per bocca di PARMENIDE e di ZENONE, giunge a negare con artificiosi sofismi il cambiamento ed il moto.

Tuttavia alla sottile dialettica, nella quale si compiaceva il fine spirito greco, contrastavano i fatti; nè vi era bisogno di una scienza sperimentale molto sviluppata per smentire tali conclusioni. La scuola di ERACLITO venne dunque ad impugnare la fissità dell'universo proclamando il cambiamento: πάντα ῥεῖ.

Ora il nodo della questione sembra consistere in questo: i requisiti formali della rappresentazione logica esprimono soltanto qualcosa di psicologico, che non è a priori applicabile al mondo fenomenico rappresentato. Perciò i prin-

cipii logici non possono attestare alcun fatto contrario al cambiamento, anzi essi non sono in verun modo da interpretare come l'enunciato di un fatto, ma esprimono le *condizioni sotto cui un oggetto o un rapporto, del mondo fenomenico, può venire logicamente rappresentato come elemento di un concetto, che il pensiero conviene di mantenere fisso nelle sue deduzioni.*

Nella realtà vi sono oggetti (coesistenze e successioni fenomeniche) che variano rapidamente, altri in modo così lento da potersi ritenere, almeno provvisoriamente, come invarianti; ebbene i primi non possono essere presi come individui del pensiero logico, i secondi si accordano invece con codesta rappresentazione, tanto meglio quanto più lenta è la variazione.

Il « sor Panèra », che poco sa maneggiare la spada, tira dritto dei colpi all'avversario, ma questi li scarta con semplici parate. « Se non sta fermo è inutile », esclama il pover'uomo nel suo dialetto lombardo.

Un tale rammarico ci fa sorridere, perchè concepiamo un'obbligazione propria dello schermitore di cogliere il momento in cui il bersaglio resta fermo e scoperto ai rapidi colpi.

In una condizione analoga si trova il pensiero che intende a cogliere fra gli elementi variabili della realtà il soggetto invariante di un ragionamento logico. E sta proprio a lui di cercare questo, se non voglia rinnovare colle sue ingenue pretese le facezie del sor Panèra.

§ 26. **Il valore degli assiomi: realtà obiettiva della Logica.**

Poniamo che in un dato ordine di fatti si sieno scorti gli elementi quasi invariabili, per modo che le condizioni rappresentative espresse dai principii logici, si trovino relativamente soddisfatte. Perchè la rappresentazione riesca adeguata, bisognerà che gli assiomi, esprimenti le leggi delle associazioni logiche, trovino riscontro nella realtà.

Ma ciò avviene di fatto, entro certi limiti dipendenti dal modo come sono realizzate le premesse; invero gli assiomi trovano riscontro nelle proprietà effettive degli insiemi di cose; p. es., alle proprietà formali delle operazioni aritmetiche rispondono in questo campo le previsioni concrete.

Siamo condotti così a riconoscere che l'applicazione della Logica suppone il realizzarsi di un fatto generale:

Sotto la condizione d'invarianza espressa dai principii logici, gl' insiemi di cose soddisfano alle proprietà espresse dagli assiomi.

Si può parlare in questo senso di una *realtà obiettiva della Logica,* la quale implica un rapporto invariabile e condizionato fra le leggi del pensiero ed il mondo fenomenico. E questo rapporto è veramente significativo. Se è lecito fingere un essere pensante in cui le associazioni degli oggetti sensibilmente fissi avvengano secondo leggi diverse da quelle espresse dai nostri

assiomi, bisogna ammettere che questi non possa vedere alcuna rispondenza fra il processo logico della sua mente e la realtà.

Gli uomini *poco logici* rassomigliano ad un tale tipo per questo, che: nell'associare le immagini degli oggetti sensibili, non riescono ad inibire l'effetto modificatore delle idee o dei sentimenti, provocati dalla rappresentazione dell'oggetto composto.

Ma fino a che punto ed in qual modo il fatto affermato colla realtà obiettiva della Logica può ritenersi verificato?

La verifica più diretta e famigliare delle proprietà degli insiemi, viene superata da una supposizione che la Scienza adotta e indirettamente va confermando col suo progresso:

Se in una classe di oggetti, sensibilmente fissi, non sono verificate le proprietà espresse dagli assiomi, mezzi perfezionati di osservazione ci avvertiranno della variabilità di codesti oggetti.

Questa formula vaga acquista, nei singoli casi, un significato determinato, ove si riesca ad apprezzare quantitativamente un limite inferiore della variazione supposta. Ed in questo senso il principio cade sotto il controllo dell'esperienza, che non ha mai mancato di confermarlo, per quanto è stato possibile.

Ma nei riguardi della costruzione scientifica, dove l'esperienza viene logicamente disposta, la fiducia illimitata che gli accordiamo costituisce una condizione del progresso. Il quale esige così un postulato, completante e precisante il postulato della conoscenza, che abbiamo diritto di tener fermo fino a quando non si mostri un arresto necessario di quel progresso, ben lungi da imporsi a noi sotto verun aspetto, e di cui anzi non sappiamo nemmeno immaginare la possibilità.

§ 27. **Limiti di applicazione della Logica.**

Insistiamo maggiormente su ciò, che le proprietà degli insiemi di cose esigono una certa invarianza di queste, giacchè tale osservazione segna il limite di applicazione della Logica.

Riprendiamo l'esempio dell'Aritmetica concreta, riguardata come un ramo della Logica applicata. Si pretende che essa sia un'opinione, ma i cassieri sono d'avviso contrario. Contano le loro monete, separandole a gruppi, tirano le somme e controllano i calcoli in più modi diversi; sempre le medesime sensazioni previste si producono nelle condizioni volontariamente disposte: di guisa che ci sono proprio dei fatti aritmetici di cui constatano la sussistenza. Se sono state prese da un mucchio 12 monete, queste si lasciano ugualmente disporre in due gruppi di 7 e di 5 o di 6 e 6; ecco il significato reale della formula $7 + 5 = 6 + 6$.

Tuttavia codesti fatti aritmetici, subordinati alle proprietà generali degli

insiemi, suppongono condizioni che ordinariamente si presumono implicite, ma che non sono meno necessarie.

Se un bravo cassiere, amante dell'igiene e della pulizia, avesse l'abitudine d'immergere le monete nell'acqua durante i suoi calcoli, l'esperienza ne confermerebbe ancora le previsioni aritmetiche; ma guai a lui se un collega d'ufficio si avvisasse di fargli uno scherzo mettendo al posto dell'acqua un acido che attaccasse il metallo. In tal caso i conti non tornerebbero più, perchè qualche moneta sparirebbe disciolta nel liquido, mentre il pover'uomo sta intento alle sue logiche deduzioni.

Ma a più alte riflessioni ci avvia l'osservazione che « le proprietà generali degli insiemi suppongono una certa invarianza delle cose associate », quando in essa si ravvisino i limiti della applicazione del processo logico alla conoscenza del reale.

Noi siamo indotti a scorgere quali difficoltà si oppongano alla rappresentazione dei vari ordini di fatti con teorie deduttive; o, in altri termini, a riconoscere fino a che punto il processo logico deduttivo possa essere applicabile nelle varie scienze.

Cercando di mezzo al cambiamento dei fenomeni, gli aggruppamenti invariabili di questi, la nostra ricerca mira a determinare le cose reali che possono assumersi come oggetti del pensiero, o rappresentarsi mediante i rapporti di questi in un sistema di concetti. Ma l'invarianza del reale essendo soltanto relativa, la previsione logica delle proprietà appartenenti ai loro insiemi riesce confermata soltanto *fino ad un certo punto*, cioè nelle prime associazioni; quando il processo deduttivo si prolunga al di là, le variazioni si accumulano e quindi la previsione riesce smentita.

La piccola variazione di lunghezza che il pendolo di orologio subisce per la temperatura è affatto trascurabile, finchè si tratta di contare un certo numero di secondi, ma per un tempo più lungo produce delle differenze fra orologio e orologio, sicchè si giunge a trovare somme di un ugual numero di termini uguali, che sono disuguali fra loro!

Ogni scienza, porgendo la verifica delle sue deduzioni, riesce a segnare *a posteriori*, siccome diremo trattando della verifica delle ipotesi implicite, i limiti entro cui i suoi oggetti possono venire rappresentati logicamente.

Questi limiti possono essere più larghi o più ristretti, secondo la relativa fissità dei rapporti fenomenici presi come oggetti della rappresentazione logica.

Da che dipende la possibilità di un impiego più ampio del metodo deduttivo?

Dalla circostanza che i dati fenomenici presentino gradi di variazione molto diversi, sicchè si possa salire per astrazione a rapporti più fissi, relativamente invarianti; dal grado d'invarianza di questi in ordine alle previsioni che si hanno in vista.

Tali circostanze sono realizzate nel modo più favorevole per i fenomeni fisici e particolarmente per quelli abbracciati dalle teorie più progredite. In questo campo il processo di derivazione delle funzioni ha risposto appunto all'esigenza anzidetta di isolare qualcosa di più fisso da elementi variabili; così, p. es., nel passaggio dalla teoria kepleriana alla newtoniana (cap. II). Perciò le teorie fisiche tendono ad esprimere la parte più costante dei rapporti fenomenici quantitativi mediante le equazioni differenziali.

Nella Chimica la ricerca degli invarianti da prendere come oggetto di trattazione logica, si manifesta nello sforzo rivolto ad isolare dai rimanenti gli elementi indecomposti, e poi nella separazione di certi composti o nuclei fissi in un certo ordine di reazioni. Il simbolismo atomico, colle formule di struttura, ricopre appunto la gerarchia degli invarianti.

Invece nella Fisiologia la più rapida mutabilità dei dati, o se si vuole la maggiore complicazione delle cause, rende più limitato l'ufficio del metodo deduttivo. Mentre l'Astronomia può isolare il sistema planetario dell'universo, durante il breve tempo di cui la storia umana deve tener conto, la Fisiologia non può prescindere dall'azione generale dell'intero organismo sopra ogni organo, appena voglia spingere le sue previsioni al di là di pochi istanti.

I minuti nella vita animale contano come i milioni di anni nella vita dei mondi!

Aggiungasi che la maggiore o minore variabilità dei dati che costituiscono l'oggetto di una scienza è da intendere non soltanto per riguardo al tempo, ma anche rispetto alle associazioni di cose prese come simultanee. Nella Fisica molti caratteri (p. es., le masse) si sommano quasi rigorosamente colla riunione dei corpi; nella Fsiologia, nelle scienze sociali, la riunione altera sempre di più i componenti che cadono sotto le nostre osservazioni.

E ben inteso che tutto ciò vale in un senso relativo; la possibilità di estendere le deduzioni sussiste per ogni scienza, subordinatamente alla scelta di dati più invarianti, cioè alla verifica delle ipotesi (implicite) che affermano codesta invarianza.

§ 28. **Il problema della verificazione.**

Ci proponiamo ora di discutere il secondo problema fondamentale della Logica applicata, concernente la verificazione delle teorie.

Ed anzitutto riteniamo da quanto si è detto che la rappresentazione del reale mediante un sistema di concetti si traduce in due ordini d'ipotesi:

1) le *ipotesi implicite* per cui si prendono come *uguali certi* aggruppamenti fenomenici (invarianti) rappresentati astrattamente come elementi dei concetti;

2) le *ipotesi esplicite* (*postulati di teoria*) che, per mezzo dei rapporti

d'associazione definienti i concetti stessi, esprimono dei rapporti reali fra gli invarianti nominati.

È chiaro che la formulazione di una teoria pone in vista soltanto le ipotesi della seconda specie, mentre le prime si ritengono accettate in precedenza come qualcosa di acquisito.

Così, p. es., nelle teorie fisiche vediamo talune quantità (la temperatura, la pressione, ecc.) legate da certe equazioni; le equazioni esprimono le ipotesi esplicite, ma la supposizione che le quantità suddette sieno definite in rapporto ad un certo stato dei corpi ecc., sta a rappresentare un insieme d'ipotesi implicite; delle quali verrà fatto di apprezzare tutta l'estensione, ove si rifletta alla varietà dei procedimenti sperimentali con cui esse possono venire determinate.

§ 29. **Verifica delle ipotesi esplicite.**

Ora il problema della verificazione conduce a valutare separatamente i criteri di accertamento, determinazione o correzione delle ipotesi esplicite e delle implicite.

Nel procedere alla verifica di quelle, queste ci porgono anticipatamente delle conoscenze che delimitano il campo delle *esperienze*, e ne rendono possibile l'*interpretazione*.

Ci troviamo dunque dinanzi ad un mondo fenomenico, i cui oggetti supponiamo già associati entro certe classi (serie ecc.), subordinatamente a certi concetti rappresentativi.

Le ipotesi da verificare essendo previamente trasformate col ragionamento deduttivo, abbiamo da sottoporre al controllo sperimentale certe proposizioni generali (teoremi) della teoria, le quali possono concernere :

1) dei caratteri di classe, cioè caratteri rispetto a cui gli oggetti dell'esperienza sono anticipatamente ritenuti uguali;

2) o dei caratteri suscettibili di variare come *funzioni* dell'oggetto, entro la classe stessa.

1) È chiaro in qual modo l'esperimento particolare c'istruisca nel primo caso, dove le ipotesi implicite contengono la possibilità della generalizzazione. Così è p. es., quando si tratta di determinare i caratteri anatomici di una specie di animali, questi essendo ritenuti uguali rispetto a quelli.

Tuttavia il valore delle esperienze verificatrici è diverso, secondochè si tratti di caratteri (*quantitativi*) suscettibili di variare per gradi insensibili, in modo *continuo*, o di caratteri (*qualitativi*) che concepiamo soltanto come elementi di una classe *discreta* di oggetti possibili; giacchè i primi caratteri vengono determinati soltanto con *approssimazione*, i secondi con *esattezza*.

Nell'esempio precedente (caratteri anatomici di specie) si tratta di carat-

teri qualitativi, e la risposta dell'esperienza è esatta. Un altro esempio analogo si ha nella determinazione del tipo cui appartengono i cristalli di un minerale, ecc.

Invece la determinazione della temperatura di fusione del ferro, o del rame, ecc. offre esempio di un carattere quantitativo di classe, che l' esperienza può fornire soltanto in via approssimativa. La conoscenza approssimata si converte in una conoscenza esatta se si parli di un intervallo limitato in cui è compreso il valore della quantità sperimentalmente definita.

2) La verifica che un certo carattere dipende (come funzione) dagli oggetti di una classe, si riconduce di solito ad un tipo di domanda di forma più particolare « riconoscere se un certo elemento, dipendente dagli oggetti di una classe, sia costante per essi, cioè possa assumersi come carattere di classe ».

Spieghiamo questa riduzione sopra un esempio.

Se una forza f agente sopra un punto mobile, nelle sue varie posizioni successive, è inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza r da un centro fisso, il prodotto fr^2 ha valore costante per le posizioni suddette; verificare questa costanza ($fr^2 = k$) equivale a verificare la dipendenza.

$$f = \frac{k}{r^2}.$$

Ora la questione di riconoscere sperimentalmente se un certo carattere è costante per gli oggetti di una classe, conduce a considerazioni in parte diverse, secondochè si tratti di *classi discrete* o *continue*. Il carattere suddetto, potrà esso stesso essere concepito come variabile in modo discreto o continuo (caratteri *qualitativi* e *quantitativi*), e sotto questo aspetto sono da ripetere le riflessioni precedenti circa l'esattezza o meno dell'esperimento particolare. Ma la difficoltà essenziale, che qui dobbiamo esaminare, concerne la *generalizzazione dell'esperimento*, e si riattacca alla prima distinzione fra esperienze nel discreto ed esperienze nel continuo.

§ 30. **Esperienze nel discreto.**

Fra le classi discrete si trovano in primo luogo quelle composte di un numero finito di oggetti; se il numero non è troppo grande e si tratta di oggetti accessibili, si può avere in questo caso una *verifica completa* delle ipotesi, istituendo tanti esperimenti quanti sono gli oggetti. È il caso più ovvio, ma praticamente di poco interesse.

Supponiamo invece una classe discreta composta di un numero molto grande (od anche infinito) di oggetti; soltanto un certo numero di esperienze è effettivamente praticabile. Queste esperienze possono condurre a due risultati :

1) Che una certa proprietà, di cui si domanda se sia un carattere di classe, non appartiene ugualmente agli oggetti sperimentati; la risposta dell'*esperienza* è allora *certa* e *negativa*.

2) Che la proprietà di cui si tratta appartiene ugualmente agli oggetti sperimentati. Con qual fondamento si potrà argomentare che essa appartiene a tutti? cioè quando è lecito interpretare l'esperienza nel senso di una verifica *positiva* dell'ipotesi?

Esaminiamo questo problema fondamentale.

Figuriamo perciò di presentarci ad una di quelle tombole a premi ove si pescano tanti foglietti chiusi, da un'urna; i fogli che portano un numero corrispondono ai premi; non è escluso del resto che si tratti di tombola a premio certo.

Si tirano su dall'urna venti o trenta foglietti; tutti portano un numero. Si conclude allora come *probabile* che, appunto, il premio sia certo. Se invece si fossero tirati su altrettanti foglietti bianchi, si riterrebbe soltanto che vi sono pochi premi. Perchè questa diversa interpretazione?

Perchè abbiamo motivo di supporre (in base ad osservazioni su altre tombole analoghe) che se furono mescolati foglietti portanti premio e foglietti bianchi, il numero di questi possa essere grande in proporzione al numero di quelli, ma non viceversa; e perchè infine il caso di frode, in cui i premi manchino affatto, deve apparire improbabilissimo di fronte al caso in cui si sia voluto il premio certo.

Ecco dunque che l'interpretazione dell'esperienza, e la sua generalizzazione, appare subordinata a talune conoscenze supposte; soltanto dopo che queste vengano precisate in un coefficiente, diventa possibile di *misurare la probabilità* del resultato, cioè di determinare un numero che esprima in quanti casi la previsione ottenuta generalizzando sarà giusta, ed in quanti errata, sopra un gran numero di casi.

In mancanza di alcuna presunzione, si potrebbero ritenere i varii casi come *ugualmente probabili*; questa ipotesi fornirebbe allora un primo criterio interpretativo dell'esperienza, grossolanamente approssimato, da correggersi col progresso delle conoscenze. Ed è opportuno avvertire che se si sia costretti ad adottare codesto criterio, il valore della generalizzazione risulta molto piccolo, appena che si tratti di classi di oggetti numerose rispetto alle esperienze fatte. Che dire del caso in cui si abbiano classi con infiniti oggetti?

§ 31. **Esperienze nel continuo.**

Le precedenti osservazioni ci fanno comprendere che il valore delle esperienze verificatrici diventa sempre più necessariamente subordinato ai concetti rappresentativi, quando si tratta di esperienze nel continuo. Qui per altro possiamo riconoscere un criterio interpretativo generale, da determinarsi in ordine

ai concetti nominati, cioè una supposizione di *continuità* che costituisce il fondamento del *metodo sperimentale*.

Quando si tratta di esperienze qualitative, il carattere dipendente dagli elementi di una classe continua non potendo variare per continuità, si ammette *a priori* costante, almeno per una *parte* della classe, contenuta entro certi *limiti* che la separano da una *classe contigua* (ad es., per un corpo liquido fra le temperature di ebullizione e di solidificazione).

Esaminiamo invece il caso di esperienze quantitative. Si tratti, p. es., di verificare un'equazione del tipo $a = b$ per gli oggetti di una classe continua, cioè (dato il carattere approssimativo di una tale esperienza) si tratti di riconoscere se sussiste per essi una diseguaglianza

$$a - b < \varepsilon,$$

dove ε rappresenta l'*errore d'osservazione*.

La verifica si compie per *interpolazione*, cioè (riferendosi ad una classe unidimensionale) si esperimenta su alcuni oggetti e si estende il resultato agli altri oggetti, *compresi* fra quelli. In base alla presunzione che la relazione fra a e b dipenda *in modo continuo* dagli elementi della classe, si argomenta che essa sia *costantemente* $a = b$, se questo resultato corrisponde agli oggetti sperimentati.

Il principio che vale a porgere una misura del criterio interpretativo (in quanti casi la generalizzazione porti a previsioni giuste) è ancora il principio di *probabilità*, dove si accetti la così detta *legge dei grandi numeri*. Ma la *probabilità matematica* a cui (secondo codesta legge) è proporzionale il numeor dei casi favorevoli o contrarii ad una ipotesi, *non è definita* se non sia prima rappresentata la varietà dei casi possibili, subordinatamente a certi concetti.

Spieghiamo come il criterio di probabilità possa permettere di apprezzare il valore probativo dell'esperienza, riferendoci ad un semplice esempio.

Per ciò proponiamo di misurare la quantità di calore che può essere sviluppata da un lavoro meccanico di a chilogrammetri. *Ammettiamo* che la suddetta quantità dipenda soltanto dalla variabile a, e sia funzione continua $f(a)$ di questa.

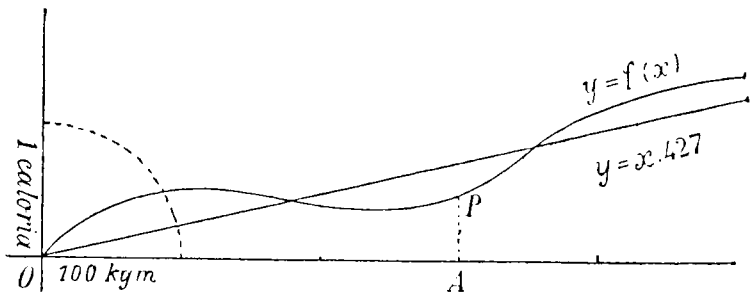
Se una prima esperienza fornisce :

$$f(a) = a : 427$$

uno sperimentatore non prevenuto nulla può trarne.

Ma supponiamo che una seconda esperienza conduca allo stesso numero, oppure che il resultato della prima esperienza sia stato precedentemente annunziato.

Ognuno accorda in tal caso all'esperienza questo valore, che, almeno entro certi limiti, il *rapporto* a : $f(a)$ *ha il valore costante 427*. Quale fondamento si può dare a questa fiducia? Ove si neghi la tesi, la funzione $f(a)$ potrà venire rappresentata da un diagramma come il seguente :



Allora se si prende a caso sull'asse delle x un punto A (OA = a) quale probabilità c'è che l'ordinata A P = $f(a)$ abbia il valore assegnato a : 427?

Evidentemente questa probabilità è *infinitesima*, ossia praticamente nulla. Pertanto se si ritiene l'esperienza come esatta, ci sono *infinite probabilità*, ossia c'è la *certezza pratica* che la curva continua $y = f(x)$ coincida colla retta di coefficiente angolare 1 : 427, o abbia comune con questa un tratto finito.

Ma teniamo conto della circostanza che il valore 427, ottenuto sperimentalmente, è soltanto approssimativo; riguardiamo perciò l'esperienza come affetta da un certo errore $< \varepsilon$. Allora il calcolo precedente deve essere modificato in questo senso : quale probabilità c'è perchè un punto preso a caso sulla curva $y = f(x)$ disti dalla retta $y = x$: 427 meno di ε ?

Sembra a prima vista che di qui si tragga senz'altro una conclusione analoga alla precedente, cioè che, prendendo come prova una probabilità non più infinita ma grande, possa ritenersi provata dall'esperienza la coincidenza approssimativa della curva $y = f(x)$, o di un tratto di essa, colla retta $y = x$: 427.

Un matematico ammaestrato nello studio delle funzioni più singolari, sarà d'avviso contrario; egli penerà poco a costruire una curva continua $y = f(x)$, la quale in ogni piccolo intervallo si approssimi e si allontani di quanto si vuole dalla retta nominata.

Ma ciò prova soltanto che la probabilità non può essere matematicamente valutata, se si lasci alla funzione continua f una arbitrarietà illimitata. Occorre invece determinare il problema limitando codesta arbitrarietà in base alla rappresentazione concettuale del fenomeno.

Nel nostro caso p. es., è da ammettere che la funzione $f(x)$ sia *crescente*, e ciò esclude già certe oscillazioni della curva.

Non vogliamo qui spingere l'analisi fino alla determinazione concreta di codesta probabilità. Basta accennare come il criterio accennato possa permettere, almeno nei casi più semplici, di *apprezzare quantitativamente il valore probabile delle verifiche sperimentali in rapporto ad una rappresentazione concettuale sufficientemente determinata.*

Naturalmente col numero delle verifiche avvicinantisi fra loro, cresce rapidamente il valore della prova raggiunta per *interpolazione*; mentre la *estrapolazione*, allontanandosi dal dominio della esperienza, perde sempre più il valore di prova, riducendosi semplicemente a suggeritrice di nuove ipotesi.

§ 32. **Conclusioni sull' interpretazione delle esperienze.**

Riassumiamo i resultati della critica precedente nelle seguenti conclusioni:

1) Il valore della verifica sperimentale, cioè l'interpretazione delle esperienze, deve subordinarsi ai concetti rappresentativi ed in ispecie alle ipotesi implicite che essi contengono.

2) Se si tratti di proprietà preventivamente accettate come proprietà di classe, l'esperienza ha valore *certo*: *esatto od approssimato* secondochè si considerino esperienze *qualitative* o *quantitative*.

3) Le esperienze qualitative nel continuo concernono sempre (entro certi limiti) proprietà di classe, se si accetti la supposizione generica di *continuità*.

4) Le esperienze nel discreto, e le esperienze quantitative nel continuo, dove si debba riconoscere « se una proprietà sia comune agli oggetti di una classe », hanno valore *certo* quando porgono *negative* delle ipotesi; le esperienze *positive* hanno soltanto un *valore probabile*, che può essere misurato, se si accetti la legge dei grandi numeri, in base ad una *rappresentazione concettuale* adeguata ai varii campi dell'esperienza (ipotesi implicite).

Pertanto i criterii di verificazione delle ipotesi esplicite si basano sulle ipotesi implicite, e su due principii generali: la legge dei grandi numeri (*probabilità*) e il *postulato di continuità*.

Se si domandi di giustificare questi principii non si può fare appello che alla grande massa delle esperienze fatte.

Bisogna dunque ammettere la supposizione generica che la esperienza abbia un valore probabile di generalizzazione, e riguardare quindi i criterii di misura di codesta probabilità, ed il postulato di continuità a cui essi si collegano, come un acquisto enormemente probabile in forza del grandissimo numero delle esperienze che lo verificano in modo diretto e indiretto: il pro-

gresso della Scienza, cui codesti principii soccorrono, vale ogni giorno più a confermarli e a renderli *determinati*.

§ 33. **Il postulato di continuità e la rappresentazione psicologica delle cause: come e perchè.**

Ora è importante notare come il principio di continuità risponda all'aspetto psicologico delle rappresentazioni di sostanza e di causa.

Ci riferiremo in ispecie a quest'ultima, riprendendo dunque in esame il nesso fra un antecedente ed un conseguente riguardati come causa ed effetto, sotto il punto di vista psicologico.

Tale questione, in cui si concentrano tanti sforzi delle speculazioni metafisiche, sembra invece negletta dai positivisti, in parte a cagione del senso trascendentale che si è preteso attribuirle, colla domanda di una causa prima o assoluta o incondizionata o efficiente.

Il suo significato ed il suo interesse risultano chiari nel progresso scientifico, dove si osservi che:

1) Nella Scienza non tutte le spiegazioni causali vengono tenute come di ugual valore; in talune si ravvisa soltanto una risposta alla domanda « *come* il fenomeno possa prodursi », in altre si scorge di più (ben inteso relativamente) un « *perchè* » del fenomeno stesso.

2) Il valore diverso di codeste spiegazioni causali può essere positivamente apprezzato, nei riguardi dello scopo conoscitivo, dalle più ampie previsioni contenute nella conoscenza del « perchè », soprattutto in rapporto alle possibili variazioni degli elementi che entrano a costituire la causa.

Ecco un semplice esempio:

Si batta una placca di rame con un martello; il rame si riscalda. Con ciò si è detto *come* il rame possa venire riscaldato.

Ma *perchè* si riscalda? viene chiesto ad un fisico aderente alla teoria meccanica del calore.

Egli risponde: Il calore è uno stato di vibrazione delle particelle di un corpo, il movimento del martello subitamente arrestato dal rame si trasmette per l'urto alle particelle di questo, le quali cominciano quindi a vibrare.

Una tale spiegazione non pretende certo di assegnare un ultimo perchè delle cose; essa riduce la domanda posta ad un'altra, che rimane senza risposta: « perchè il movimento si trasmette nell'urto? » Ma appunto nella riduzione ottenuta consiste il motivo della soddisfazione intellettuale che vi si connette; ed a questa fa riscontro una più estesa conoscenza dei modi di riscaldamento del corpo con mezzi meccanici.

La Scienza che non esige mai una risposta definitiva alle sue domande, si appaga provvisoriamente di simili « perchè », salvo a proseguirne la serie illimitata, e vi trova sempre un analogo vantaggio.

Citiamo ancora come esempio la spiegazione del diverso processo chimico con cui si formano il solfato di zinco e il solfato di rame, dove ci si riduce in ultima analisi all'attrazione elettrica elementare fra particelle di materie vicine, senza pretendere tuttavia di spiegare ulteriormente codesta azione.

Ora se si vuol penetrare più addentro nell'esame delle differenze fra le spiegazioni causali, si può fare l'osservazione generale seguente:

Quando si assegna *come* avviene un fatto, si enuncia un semplice rapporto di successione fra un antecedente ed un conseguente isolatamente presi. Quando se ne dice il *perchè*, vi si associa la rappresentazione di una *serie continua* di fenomeni intermedii (reali o fittizi).

Questa spiegazione riduce dunque il rapporto causale dato ad una *serie di cause immediate* o *elementari subordinate l'una all'altra*, dove si pensa la causa elementare come un antecedente *molto vicino* al suo effetto.

Risulta di qui che: *la ricerca del perchè implica una rappresentazione delle cause, che contiene come supposto implicito la continuità della corrispondenza causale.*

Questo postulato di continuità è ciò che rimane delle cause elementari, dove si lascino cadere gl'intermediarii fittizii fra gli antecedenti ed i conseguenti reali.

Abbiamo già detto come esso possa giustificarsi in fatto sulla base di una larga esperienza, e come fornisca a sua volta i più importanti criterii d'interpretazione della verifica sperimentale.

Emerge quindi l'ufficio della tendenza psicologica a rappresentare le cause elementari; la quale, mentre appare in una certa misura condizione del progresso scientifico, si vede ottenere con questo un successo crescente.

Fino a che punto codesta tendenza riesce effettivamente ad esplicarsi relativamente alla realtà?

Sulla nostra terra si producono fenomeni luminosi in connessione colla luce emanata da stelle lontane; la causa e l'effetto sono fenomeni separati da milioni di milioni di chilometri e da centinaia di anni.

A distanze meno grandi, ma sempre enormi, l'attrazione dei corpi celesti si fa sentire entro al sistema planetario, in un modo che alcuna ragione positiva ci porta a ritenere non istantaneo.

Ebbene le rappresentazioni concettuali, ognora rinascenti, lasciano scorgere un lavoro assiduo di costruzione ipotetica, per riattaccare codesti fenomeni mediante una serie causale continua d'intermediarii fittizii.

Alla luce, poichè essa impiega un tempo di propagazione, si dà un supporto materiale, l'etere, che viene riguardato come un mezzo attraverso a cui il fenomeno si trasmette per continuità. Alla gravitazione si sta cercando

qualcosa di analogo, convinti che una ricerca meglio condotta debba rivelarci come essa non si propaghi istantaneamente.

Un siffatto modo di argomentare potrebbe porgere facile argomento di riso; quale mancanza di rispetto verso l'esperienza per parte di chi non lascia passare un giorno senza renderle omaggio!

Eppure la giustificazione di codesta tendenza risiede in un confronto più largo di altre esperienze che progressivamente sono venute confermando i corollarii di analoghe presunzioni, ed anche nella veduta che *la rappresentazione delle cause elementari estende il campo delle esperienze possibili e conferisce a queste un valore probativo che spesso verrebbe meno all'infuori delle ipotesi in essa contenute.*

§ 34. **Accertamento e verifica delle ipotesi implicite.**

Le difficoltà inerenti alla verifica delle ipotesi esplicite, nelle singole teorie, è stata in parte ricondotta all'accettazione di ipotesi implicite. Emerge dunque la necessità di discutere i criteri di accertamento, di verifica e di correzione di queste.

Diciamo anzitutto del loro *accertamento preventivo*.

Nella costruzione di una teoria sono da assumere possibilmente come ipotesi implicite le conclusioni verificate nel modo più preciso di altre teorie. Se anche queste non hanno ricevuto dalla esperienza intera conferma, avviene generalmente che trovinsi verificate *in parte*; e che le conclusioni parziali messe a confronto con un ordine più largo di conoscenze acquistino un valore altamente probabile, ed abbastanza esatto, in guisa da poter servire come fondamento ad una costruzione nuova più solida.

Tuttavia le ipotesi più implicite così assunte, *per deduzione*, possono spesso venire integrate per mezzo di altre associazioni di dati empirici, cioè *per induzione*. Anzi questo processo propriamente induttivo ha un ufficio tanto più largo quando si tratti delle prime fasi della costruzione scientifica.

Relativamente ai criterii da seguire nelle induzioni anzidette è il caso di ricordare i *canoni* di STUART MILL, fondati sui principii di sostanza e di causa (il filosofo inglese si riferisce sempre alla causa). Ma dopo le osservazioni dei §§ 22, 23 è inutile aggiungere che codesti canoni hanno soltanto un significato schematico ed un valore limitato.

Così, p. es., quando si parla del *metodo induttivo di concordanza* « prendere come causa *la sola* circostanza comune a varii casi di un fenomeno », si sottintende sempre un'*astrazione* da infinite circostanze comuni, pensate come indifferenti. E l'esempio che da taluno si adduce, dove s'argomenta che « lo stato fisico dei corpi è causato dal calore », ci mostra appunto il valore limitato del metodo, poichè fra gli elementi trascurati si trova qui la « pressione » di cui deve tenersi conto nella liquefazione dei cosidetti gas permanenti, ecc.

Emerge dalle osservazioni precedenti che, comunque le ipotesi implicite di una teoria siano state preventivamente accertate con criterio prudente, e soprattutto nei primi momenti di una costruzione scientifica, permane un dubbio sul valore di codeste ipotesi e sui limiti di approssimazione in cui esse possono tenersi vere. Quindi la necessità di verificare a posteriori se e quanto esse sieno valide, e, dove sia il caso, di correggerle.

La verifica delle ipotesi scientifiche è data ancora dall'esperienza, ma piuttosto in senso *negativo* che *positivo*.

Se un rapporto fenomenico preso implicitamente come invariante non può più considerarsi tale in un certo ordine di considerazioni, la sua non invarianza si manifesta con una contraddizione delle esperienze.

I principii logici, che esprimono, come si è detto, le condizioni di applicabilità del metodo deduttivo, porgono così a posteriori il mezzo di riconoscere l'*errore* delle ipotesi implicite, *relativamente ad un certo sistema di deduzioni*. Si deve ritenere invece che l'*accordo delle esperienze*, istituite a verificare teoremi logicamente dipendenti di una teoria, porga una conferma sempre più probabile delle sue ipotesi implicite.

Quanto alla *correzione* delle ipotesi implicite riconosciute erronee, non si può indicare altra via che di ritornare ai criterii dell'accertamento induttivo, tenendo conto degli acquisti parziali probabili che (nonostante l'errore suddetto) si troveranno forniti dalla teoria sviluppata. La sola regola generale, che qui sia da darsi, è di allargare, quanto è possibile, le associazioni ed i confronti: confrontare e valutare l'ipotesi in rapporto all'*insieme* della Scienza, ritenuta provvisoriamente come acquisita, è il solo modo di giudicare di ognuno dei principii, che trovansi in un dato momento alla base dell'edifizio scientifico!

Si aggiunga che non soltanto colla semplice moltiplicazione dei controlli, il progresso scientifico riesce a stringere più da vicino la verificazione delle ipotesi implicite di una teoria.

Mentre la *deduzione* moltiplica i teoremi verificabili, la *definizione* costruisce concetti nuovi a rappresentare nuovi rapporti reali possibili, che debbono essere presi come invarianti. Ora una piccola variabilità di fatto nei rapporti presi inizialmente come oggetti del pensiero si traduce in una apprezzabile variazione dei rapporti associativamente definiti, e cade così sotto il controllo di una verifica più precisa, diretta o indiretta.

La definizione appare quindi come un processo moltiplicatore degli errori d'osservazione, atto a porre i teoremi della teoria in una veste opportuna per porgere una verifica delle premesse, nella quale le contraddizioni che derivano dalle ipotesi implicite si rendano più evidenti.

§ 35. **Esempii.**

Ad illustrare le cose dette, possonsi citare alcuni esempii.

La contraddizione delle esperienze è il criterio che avverte talvolta il chimico come un corpo da lui ritenuto implicitamente un'unica sostanza semplice conosciuta, contenga invece qualche altro elemento; così avvenne in fatto la scoperta di alcuni fra i nuovi corpi semplici.

Nella Meccanica, il postulato della invarianza della massa rispetto al movimento, costituisce un'ipotesi implicita che nessuna sensibile contraddizione di esperienze è venuta ad infirmare. Tuttavia se codesta invarianza solleva oggi qualche discussione, ciò avviene perchè accanto ai movimenti effettivi si sono definiti dei movimenti possibili con velocità enormi, e messi a confronto questi con altri ordini di fenomeni (cap. VI).

È dunque l'estendersi di certi concetti rappresentativi del reale, mediante definizioni, che porge qui un eventuale criterio di correzione delle ipotesi implicite.

§ 36. **La crisi dell'Economia politica contemporanea.**

È interessante di riattaccare alle precedenti considerazioni l'odierna crisi dell'economia politica, dove si riguardi, come oggetto del dissidio sul metodo di tale scienza, una diversa valutazione delle ipotesi implicite assunte dalla scuola classica.

È noto come questa abbia creato con ADAMO SMITH il tipo dell'*homo oeconomicus*, col quale si vengono a fissare in modo invariante i motivi agenti sulla volontà dell'uomo individuo, considerato nei rapporti di scambio della ricchezza e del lavoro.

Questo tipo, sebbene faccia astrazione dai diversi moventi etici che modificano e complicano le azioni umane, risponde assai bene alla rappresentazione di queste, quando si abbiano di mira i suddetti rapporti economici, ai quali le accennate complicazioni riescono estranee, almeno *nella media*.

A definire il concetto dell'*homo oeconomicus*, l'Economia classica ha assunte talune semplici e quasi evidenti ipotesi esplicite, dalle quali ha dedotto previsioni concrete e generali in diversi ordini di fatti.

Riscontriamo queste ipotesi nella teoria di RICARDO della rendita differenziale.

Riferendosi, p. es., al mercato del grano, per cui la legge ricardiana fu appunto inizialmente stabilita, si supponga che il *costo di produzione* di esso, in una serie di campi, possa valutarsi, tenendo conto del lavoro e del capitale occorrente per la coltivazione, e se occorre del trasporto in un dato mercato. Siano α, β, γ .... i prezzi unitarii di costo del grano nei campi suddetti.

Ammettendo che questi grani si contrattino simultaneamente in un mede-

simo mercato, e chiamando a, b, c.... i relativi prezzi unitarii di vendita, avremo :

1) Nessun compratore è disposto a pagare il grano più di quello che domandi il venditore meno esigente;

2) e nessun venditore è disposto a rilasciare il suo grano ad un prezzo inferiore di quello offerto dal miglior compratore;

per conseguenza tutti i contratti di vendita tendono a livellarsi, e si può accettare come molto prossima al vero l'ipotesi

$$a = b = c = \ldots.$$

3) D'altra parte nessuno è disposto a coltivare un campo in pura perdita, sicchè è da ritenere che se qualcuna delle differenze $a - \alpha$, $b - \beta$, $c - \gamma$.... fosse (durevolmente) negativa la coltivazione a grano del relativo campo dovrebbe cessare.

Supponendo l'invariabilità dei prezzi a, b, c..., α, β, ..., cioè riferendosi ad un supposto *equilibrio economico*, si avrà dunque

$$a - \alpha \geq 0, \quad b - \beta \geq 0, \quad c - \gamma \geq 0 \ldots.$$

Pertanto si deduce che ogni coltivatore profitta di una rendita uguale o superiore alla differenza fra il costo di produzione del grano nel proprio campo e il costo di produzione nel campo meno rimunerativo.

Supposto invero

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta \ldots,$$

si ricava

$$b - \beta \geq \alpha - \beta, \qquad c - \gamma \geq \alpha - \gamma \ldots.$$

Questa deduzione relativa alla *rendita differenziale* (nel campo dell'agricoltura e più generalmente di una qualsiasi industria) si completa per via di una deduzione ulteriore fondata su analoghe ipotesi.

Si supponga che :

4) Esista una serie di campi ancora incolti, relativamente ai quali il costo di produzione del grano vada crescendo in modo quasi continuo a partire dal minimo α che appartiene al meno rimunerativo fra i campi coltivati.

Allora deve presumersi che : se il prezzo del grano *supera* α cioè se $a - \alpha > 0$ (e non $a - \alpha = 0$), si troverà chi voglia coltivare a grano qualcuno dei campi suddetti.

Così per un lato verrà ad aumentare il costo di produzione del grano nel campo meno rimunerativo (poichè si coltivano campi sempre meno rimune-

rativi), per un altro lato verrà a diminuire il prezzo del grano riversandosi sul mercato una maggiore quantità di esso. Pertanto si giunge alla conclusione che « in uno stato di equilibrio economico, il prezzo del grano tende a ragguagliarsi al suo costo di produzione nel campo meno rimunerativo ».

Questo enunciato esprime la legge della rendita differenziale nella sua forma più precisa, integrata colla legge che commisura il valore della merce al costo di produzione dell'ultimo prodotto. Ed è chiaro che l'enunciato si può riferire analogamente ad altre merci industrialmente prodotte in condizioni diverse.

Ora la legge sopra stabilita ha ammesso ed ammette tuttora numerose verifiche sufficientemente approssimate, ove si tenga conto che il supposto *equilibrio economico* è uno stato limite non mai raggiunto dalla società.

Ma per contro altre osservazioni si trovano con queste verifiche in diretta contraddizione, e si può aggiungere che i casi in cui la regola non è confermata vanno ai giorni nostri crescendo.

Si manifesta così che l'invarianza attribuita all' *homo oeconomicus* non è sufficientemente rigorosa rispetto a certe deduzioni e alle previsioni che vi si appoggiano.

In ispecie la variabilità di questo tipo si manifesta nel fenomeno grandioso dell'*associazione*. La riunione di molti uomini, che dovrebbe fungere come una semplice somma, si allontana dal previsto giungendo a svolgere un'attività che riesce a scontare anticipatamente e ad impedire gli effetti della libera concorrenza.

I recenti *trust* internazionali ne porgono una testimonianza visibile.

Ecco come l'associazione giunge fino ad un certo punto ad invertire i motivi agenti sui produttori. Mentre il singolo produttore non può aumentare il suo profitto se non aumentando la quantità del prodotto, la società che abbia accaparrato una parte dei mezzi di produzione può ottenere più utilmente il suo scopo diminuendo il prodotto in guisa da diminuire l'offerta della merce sul mercato, poichè essa ha interesse a mettere in opera soltanto i mezzi meno costosi, se riesce in compenso ad innalzare il profitto della rendita differenziale che da questi ricava; inoltre la società può farsi arbitra del mercato impedendo la produzione di merce per opera di estranei, colla minaccia di offrire i suoi prodotti ad un prezzo minore, in guisa da cagionare la rovina dei suoi avversarii, e ciò sia pure a costo di sacrifizii temporanei.

Soprattutto in quest'ultima circostanza psicologica si ravvisa un elemento nuovo che distingue l'associazione da una « somma di uomini », di guisa che i fenomeni anzidetti non appariscono spiegabili ove si mantenga il concetto individualistico dell'*homo oeconomicus*, pur modificando qualcuna delle ipotesi esplicite sopra enunciate.

Vediamo nell'esempio precedente messi in opera i due criterii di verifica delle ipotesi implicite: la contraddizione delle osservazioni manifesta per un lato la non rigorosa invarianza dell'*homo oeconomicus*, agli effetti delle previsioni richieste; e, d'altra parte, codesta non invarianza risulta direttamente per riguardo alle associazioni economiche, che nella teoria sarebbero definite come semplici riunioni di uomini.

Non è il caso per noi di trarre dalle precedenti considerazioni una conclusione che pretenda a dirimere il conflitto delle scuole economiche. Ci basta di avere illuminato codesto conflitto (facendo astrazione da ciò che vi è in esso di non scientifico) come inerente alla valutazione delle ipotesi implicite della scienza.

Sotto questo aspetto la scuola che assumendo il metodo storico respinge l'impiego del metodo deduttivo, e la scuola matematica che all'opposto svolge e perfeziona questo metodo, passando da una *Economia statica* ad una *Economia dinamica*, possono venire riguardate dal filosofo come collaboranti alla creazione di una fase nuova della scienza. Forse questa fase si disegna già negli ultimi sviluppi della scuola matematica di Losanna e in particolare negli ultimi lavori di W. PARETO [1]. La conclusione fondamentale che sembra scaturire da tali studii può essere formulata come segue:

Si possono costruire diverse *teorie economiche*, prendendo come base i « gusti » degli uomini e gli « ostacoli » di differente natura, che si oppongono al loro soddisfacimento. Si ottengono così tante rappresentazioni possibili dei fenomeni economici, rispetto a cui la teoria classica esprime una prima approssimazione.

Ora una teoria economica potrà essere stabilita in guisa da collegare i fatti in un determinismo rigoroso, appena che si sieno ammessi certi rapporti fondamentali, i postulati della teoria, varianti col luogo e col tempo secondo le condizioni storiche e psicologiche dell'ambiente.

Così il metodo deduttivo, divenuto rigoroso mercè l'applicazione delle Matematiche, rivendica tutti i suoi diritti entro confini ben segnati, mentre si rimanda alla storia e alla psicologia il tentativo di spiegare le variazioni dell'ambiente sociale, conducenti dal campo di una teoria a quello di un'altra. Per tal modo crediamo almeno d'interpretare gli ultimi sviluppi della scienza economica.

§ 37. **Conclusioni: il circolo vizioso della Scienza.**

Riguardiamo nel loro insieme i criterii di verifica delle ipotesi, esplicite o implicite, delle teorie.

[1] Manuale di Economia politica — Milano, 1906.

Appare tosto emergere dalle cose dette una conclusione paradossale, che può essere designata col nome di *circolo vizioso della Scienza*.

La verifica delle ipotesi esplicite esige un' interpretazione delle esperienze, subordinata alle ipotesi implicite; alla lor volta queste vengono verificate *in gran parte* sulla base di altre teorie ed ipotesi esplicite, e corrette, ove occorra, con un più largo confronto delle conoscenze acquisite. Il progresso della Scienza si appoggia dunque sulla Scienza stessa, è un'*estensione* non una *creazione*.

Appunto per sfuggire a questo circolo vizioso KANT è stato condotto alla sua dottrina dell' *a priori*. E per la medesima ragione questa dottrina rinasce trasformata nella filosofia francese contemporanea, che riguarda i principii, canoni interpretativi dell'esperienza, quasi pure *convenzioni*.

Gli scienziati farebbero dunque come i legislatori che conferiscono all' oro l'ufficio di merce liberatrice dei pagamenti, e l'assumono quindi ad unità di misura dei valori; anzi, se si vuol mantenere il paragone, la Scienza sarebbe uno stato a regime plurimetallico, giacchè non si tratta di un principio solo!

Ma l'assunzione dell'oro come moneta è basata sul fatto che questo ha già un valore di scambio, che si commisura a quello delle merci; e quanto ai regimi bimetallici, il rapporto legale ha per effetto di sostituire la peggior moneta alla buona.

Anche per i principii scientifici s'impone dunque l'obbligo di considerarli come espressioni di esperienze fatte, e di misurarli e rivederli di continuo in rapporto alle successive esperienze; ed è questo un punto che non è sfuggito al POINCARÈ. Onde se si vogliano riguardare le cose piuttosto in un aspetto reale che formale, sembra giusto (e ciò già accennammo) di disegnare codesti principii come *supposizioni determinantisi progressivamente*, anzichè come *convenzioni*.

Ad ogni modo la difficoltà resta intera per chi non sia disposto a riconoscere in alcun principio qualcosa che *preceda* ad ogni esperienza. Non si sfugge alla conclusione che il ragionamento sperimentale estende la Scienza, ma non la crea.

Questa conclusione dobbiamo accettare come un fatto positivo, e vogliamo mostrare che questo, rettamente interpretato al lume della critica, non involge quel circolo vizioso, che ci siamo piaciuti di mettere innanzi come un paradosso.

Infatti ad ogni momento della costruzione scientifica precede sempre un certo insieme di conoscenze, più o meno probabili e precise, che riteniamo acquisite. E similmente in ogni investigazione sperimentale, in ogni formazione di concetti nuovi, possiamo appoggiarci sopra concetti già formati.

Così l'approssimativa invarianza dei corpi è una conoscenza che pre-

cede le ricerche dei fisici sulla costanza della massa. Così ancora, certi concetti e certe intuizioni, p. es., geometriche, meccaniche, fisiche, si trovano già possedute almeno in germe dalla nostra mente nell'atto di iniziare la ricerca scientifica, come qualcosa di acquisito da anteriori esperienze abituali.

Il circolo vizioso della Scienza si risolve nella constatazione che lo sviluppo di questa non ha un principio, ma si estende indefinitamente all'indietro come in avanti; che l'acquisto delle conoscenze non cade per intiero nel dominio della coscienza chiara e della volontà, ma si prolunga nelle associazioni inconscie ed istintive.

È sufficiente di ritenere che queste trovinsi in qualche modo adattate alla vita, per dare un certo valore approssimato e probabile alle prime conoscenze che si prendano come acquisite.

Il progresso della Scienza è procedimento di *approssimazioni successive*, dove dalle *deduzioni* parzialmente verificate e dalle contraddizioni eliminanti l'errore delle ipotesi implicite, sorgono nuove *induzioni più precise, più probabili, più estese*.

In questo procedimento taluni concetti primi e generali, come i geometrici ed i meccanici, porgono i principii direttivi meno variabili, se pure non *assolutamente* fissi. Ad essi perciò dovrà rivolgersi la nostra critica collo scopo di spiegarne il valore reale e la genesi psicologica.

Ma, rimandando tale esame ai capitoli seguenti, vogliamo svolgere prima alcune brevi considerazioni sui problemi fisiologici che si connettono alla Logica, e scaturiscono dal confronto dei suoi due aspetti, subiettivo ed obiettivo.

cede le ricerche dei fisici sulla costanza della massa. Così ancora, certi concetti e certe intuizioni, p. es., geometriche, meccaniche, fisiche, si trovano già possedute almeno in germe dalla nostra mente nell'atto di iniziare la ricerca scientifica, come qualcosa di acquisito da anteriori esperienze abituali.

Il circolo vizioso della Scienza si risolve nella constatazione che lo sviluppo di questa non ha un principio, ma si estende indefinitamente all'indietro come in avanti; che l'acquisto delle conoscenze non cade per intiero nel dominio della coscienza chiara e della volontà, ma si prolunga nelle associazioni inconscie ed istintive.

È sufficiente di ritenere che queste trovinsi in qualche modo adattate alla vita, per dare un certo valore approssimato e probabile alle prime conoscenze che si prendano come acquisite.

Il progresso della Scienza è procedimento di *approssimazioni successive*, dove dalle *deduzioni* parzialmente verificate e dalle contraddizioni eliminanti l'errore delle ipotesi implicite, sorgono nuove *induzioni più precise, più probabili, più estese*.

In questo procedimento taluni concetti primi e generali, come i geometrici ed i meccanici, porgono i principii direttivi meno variabili, se pure non *assolutamente* fissi. Ad essi perciò dovrà rivolgersi la nostra critica collo scopo di spiegarne il valore reale e la genesi psicologica.

Ma, rimandando tale esame ai capitoli seguenti, vogliamo svolgere prima alcune brevi considerazioni sui problemi fisiologici che si connettono alla Logica, e scaturiscono dal confronto dei suoi due aspetti, subiettivo ed obiettivo.

C - L'aspetto fisiologico della Logica.

§ 38. **Posizione del problema.**

Il duplice modo di riguardare la Logica, come sistema delle leggi che reggono un processo psicologico, e come sistema di condizioni e di ipotesi per cui questo processo ha un valore nell'applicazione scientifica, ci pone dinanzi a problemi di alta importanza.

In qual modo si lascierà *spiegare* il rapporto fra certe leggi del pensiero ed il mondo fenomenico, che è implicato nella realtà obiettiva della Logica?

La parola « spiegare » assume qui un senso determinato se il processo psicologico vien riguardato nel suo aspetto fisiologico, ammettendosi dunque che i fenomeni del pensiero, le operazioni associative, e le leggi da cui esse sono governate, trovino riscontro in un ordine parallelo di fenomeni fisiologici, in operazioni fisiologiche e nelle condizioni secondo cui queste si effettuano.

In una siffatta interpretazione, la *tesi empirica*, che considera le leggi logiche come nozioni di fatti generali acquisite per esperienza, si trasforma in una veduta *epigenetica* dello sviluppo delle *funzioni fisiologiche*; la *tesi critica*, che riconosce nelle leggi suddette condizioni a priori della psiche, si converte in una veduta *preformistica* della struttura nervosa, e particolarmente cerebrale, in rapporto ad elementari condizioni meccaniche, fisiche ecc. dell'organo.

Ora la prima tesi, per quanto concerne l'individuo, è stata superata il giorno in cui si è riconosciuto tutto ciò che la struttura del vivente deve alla eredità, spostando in tal modo l'oggetto della ricerca dall'individuo alla specie. La seconda tesi rimane come una veduta generica in quest'ordine di problemi, troppo vaga per essere considerata come una spiegazione della difficoltà che abbiamo in vista.

Mettiamo in disparte le ulteriori questioni biologiche, nelle quali si esplica il contrasto fra l'indirizzo epigenetico ed il preformistico. Per noi è chiaro questo, che: la struttura fisiologica degli organi del pensiero, come esso è nella psiche formata dell'uomo soddisfa a condizioni per cui il processo logico trova riscontro in certi fatti generali; codeste condizioni non si riducono alla pura nozione dei fatti accennati, ma esprimono il *modo d'operare* dell'organo.

Ora, comunque l'organo stesso abbia acquisito tale « modo d'operare », si domanda se sia possibile formarsi di questo una *rappresentazione*, che metta in luce l'anzidetto riscontro.

§ 39. **Ipotesi fondamentali.**

Formarsi una rappresentazione del processo fisiologico del pensiero, è tal problema che l'enunciarlo soltanto sembrerà temerario! Che cosa sappiamo noi dei fenomeni più elementari che hanno sede nel cervello? Appena talune funzioni furono localizzate con qualche certezza in base al metodo anatomico della degenerazione o a quello embriologico fondato sulla mielinizzazione delle fibre nervose.

D'altra parte le nostre conoscenze relative agli elementi del sistema nervoso, non vanno al di là di qualche resultato istologico che fu recentemente accertato con mezzi tecnici perfezionati; e non sembra veramente probabile che, pur avanzando in questa via, si riesca ad acquistare una più chiara veduta delle funzioni fisiologiche delle cellule e delle fibre nervose, ove non ci si voglia appagare di ipotesi arbitrarie.

Gli stessi cambiamenti frequenti nelle idee che corrono intorno alle questioni più semplici, attestano lo stato arretrato di quest'ordine di studii.

Per citare un solo esempio, sono trascorsi pochi anni da che la *teoria del neurone* sembrava sicuramente stabilita, e già gli studi di APATY sono ve-

nuti a distruggerne il fondamento anatomico, mentre l'esperienza di BETHE sul *Carcinus Menas* sembra rovesciarne le asserzioni fisiologiche.

Ma non si tratta qui di rappresentarsi gli elementari processi fisiologici che si traducono nel pensiero, bensì soltanto taluni rapporti generalissimi di questi; e ciò può essere richiesto in un senso analogo a quello di alcune teorie fisiche, nelle quali si riesce ad una rappresentazione dei fenomeni appoggiandosi sopra un ipotetico sostrato meccanico, che non viene per nulla determinato.

Ci sia concesso, per chiarezza, di fissare dapprima alcune ipotesi da cui ci renderemo poi indipendenti in una certa misura.

La *prima ipotesi* è che l'ideazione si lasci rappresentare fisiologicamente come un insieme di *correnti nervose*, in qualche modo analoghe a quelle che si possono constatare nel caso delle funzioni cerebrali più basse.

Che cosa sia il fenomeno elementare così designato; se vi sia in un certo gruppo di cellule o di fibre una scarica elettrica o una serie di fenomeni di metabolismo; se si tratti di fenomeni osmotici o di un altro ordine qualsivoglia di fenomeni fisici, chimici o fisiologici; queste sono ipotesi che possiamo lasciare affatto da parte.

Il nostro schema ci raffigura dunque un intreccio complicatissimo di fenomeni che, sotto il nome di correnti, consideriamo come leganti centri o gruppi di cellule cerebrali, secondo azioni e reazioni attraverso certe *vie associative*.

La *seconda ipotesi* (che enunciamo qui nella sua forma più restrittiva) è che, nei processi corrispondenti allo sviluppo logico, le correnti possano ritenersi come nettamente *localizzate*, secondo vie che restino fisse, entro certi gruppi di cellule e di fibre, durante il corso del processo.

Questa ipotesi si può, in un certo senso, giustificare sulla base di due considerazioni.

La prima è il principio che « la corrente nervosa tende a ripetersi secondo le vie già percorse ».

Questo principio, che non implica alcuna intima conoscenza della corrente nervosa, costituisce un' ipotesi generalmente accolta dai neurologisti, qualunque sieno del resto le loro particolari vedute intorno alla costituzione istologica dei tessuti costituenti la sede dei fenomeni.

Invero l'ipotesi suddetta :

1) sta a fondamento della ordinaria spiegazione genetica dei riflessi :

2) porge il filo conduttore delle ricerche sulle localizzazioni cerebrali, il cui concetto, comunque debba essere allargato e complicato colla veduta dell'integrità dell'organo, resta sempre confermato da un piccolo numero di resultati sperimentali, concordanti coll'osservazione di alcuni casi clinici;

3) spiega bene lo svilupparsi delle funzioni vicarie, in seguito all'estirpazione di qualche parte della corteccia cerebrale.

Ora la disposizione fisiologica delle vie nervose a divenire più permeabili alle correnti da cui furono ripetutamente percorse, *tende* a produrre la fissità delle vie associative, porgendo così il fondamento più naturale della legge psicologica di associazione per abitudine, siccome è stato notato fino da DESCARTES e da LOCKE [1].

Ma all'incontro della suddetta tendenza agiscono i molteplici stimoli esterni, e le mutue reazioni delle stesse correnti cerebrali, le une sulle altre.

Perciò in un modello che abbracci generalmente tutta la serie dei processi cerebrali, rappresentati come un sistema di correnti, le vie associative non potrebbero ritenersi nettamente localizzate.

Ma riferiamoci ora ad una seconda considerazione, cioè al fatto generale della *inibizione* esercitata dai centri superiori sugli inferiori.

Se in un dato processo intervenga un atto inibitorio ad isolare, per dir così, le correnti dalle azioni perturbatrici delle correnti vicine, apparirà naturale di supporre che queste risultino, fino a che duri l'inibizione, localizzate entro vie fisse.

La nostra seconda ipotesi fondamentale si può dunque ritenere giustificata, se si ammette che « all'affermazione di un oggetto del pensiero logico, o alla supposizione di un concetto, corrisponda un atto inibitorio che agisce sui processi fisiologici corrispondenti, nel modo anzidetto ».

L'ipotesi della localizzazione del pensiero nei processi logici, può essere intesa del resto in largo senso. Il modo di esporla più chiaramente consiste nel riferire gli oggetti pensati a parti istologicamente determinate dei tessuti cerebrali, come esse si mostrano all'esame microscopico, cioè a gruppi di cellule o di fibre. Ma non è veramente necessario di dare alla teoria questo preciso significato anatomico; ciò che in ultima analisi giuoca nelle spiegazioni seguenti è una certa invarianza dei processi cerebrali che si compongono in un processo più complesso durante l'associazione logica, ed una tale invarianza potrebbe anche venire intesa in sensi diversi.

§ 40. **Spiegazione degli assiomi.**

Vediamo in qual modo le ipotesi adottate sul meccanismo del processo logico permettano di spiegare il rapporto fra le leggi del pensiero ed i fatti implicati dalla realtà obiettiva della Logica.

Il rapporto fondamentale è che « le proprietà reali degli insiemi di oggetti, sotto certe condizioni d'invarianza di questi, vengono espresse dagli

[1] W. JAMES: « Principii di Psicologia », trad. it., pag. 403, dice che la scienza moderna non ha trovato da perfezionare questa antica spiegazione.

assiomi, i quali esprimono d'altra parte le leggi operative dell'associazione logica ».

Questo rapporto risulta spiegato in quanto che l'associazione logica corrisponde, nel nostro schema, all'avvenimento simultaneo di correnti che decorrono secondo vie costanti, e quindi, nello aspetto fisiologico del pensiero, associare equivale a comporre processi cerebrali invariabili.

Secondo la spiegazione precedente, il verificarsi degli assiomi nel raziocinio, potrebbe essere constatato sperimentalmente da un osservatore capace di seguire i processi cerebrali corrispondenti e di riconoscere che essi non vengono modificati (fino ad un certo punto almeno) per la circostanza di svolgersi simultaneamente. La *illogicità* del raziocinio risulterebbe da un indebolimento dei poteri inibitorii per cui i suddetti processi reagirebbero gli uni sugli altri, in modo da modificare le vie percorse dalle correnti, il che potrebbe essere constatato dal nostro supposto osservatore. Questa ipotesi trova riscontro nelle condizioni psicologiche (già notate nel § 26) degli uomini poco logici, i quali sono incapaci di fare astrazione sistematica dai sentimenti che accompagnano certe associazioni e tendono a modificare il prodotto.

§ 41. **Sulla rappresentazione di causa.**

Le stesse ipotesi fisiologiche permettono di render conto delle principali circostanze attinenti all'aspetto rappresentativo della causa.

Lo stato psicologico dell'*attesa*, che esprimiamo ammettendo *invariabile* un rapporto *invariato* tra sensazioni, si lascia interpretare fisiologicamente come un eccitamento dei centri cerebrali che sono la sede di certe immagini sensoriali. Quest'eccitamento si può produrre, in virtù di associazioni stabilite, quando si risveglino le immagini sensoriali connesse.

Così appunto dobbiamo figurarci, dal punto di vista fisiologico, la rappresentazione di causa ed effetto.

Ora dunque, perchè una successione costante di sensazioni venga rappresentata come una dipendenza causale, occorre che fra le immagini dell'antecedente e del conseguente si stabilisca una associazione psicologica.

Nella rappresentazione causale che designamo colla parola « come », si legano due immagini nettamente distinte; in quella che risponde alla parola « perchè » si ha invece una serie di immagini associate per contiguità. In quest'ultimo caso dunque, a differenza del primo, la rappresentazione del rapporto di causa si presenta come un processo cerebrale nettamente definito nella sua continuità, cioè come una corrente o una serie di correnti, che stabilisce un nesso fra l'immagine della causa e quella dell'effetto.

Secondo il principio che le correnti nervose determino col loro passaggio le vie associative, abbiamo dunque qui non solo l'associazione fra due *imma-*

gini, ma la *condizione fisiologica del loro associarsi*. E ciò spiega il sentimento di necessità che si accompagna a codesta associazione.

Le osservazioni precedenti ci palesano la differenza fisiologica tra i due ordini di rappresentazioni causali, in cui l'antecedente e il conseguente sono i fenomeni estremi di una serie continua, oppure restano invece nettamente distinti. Nel caso delle così dette *spiegazioni metafisiche*, la serie continua dei fenomeni che lega la causa all'effetto non è realmente data, ma semplicemente supposta.

Il valore psicologico di una tale supposizione si lascia agevolmente comprendere : essa costituisce un *termine medio* tra l'antecedente ed il conseguente che voglionsi legare in un rapporto causale; questo termine medio è una serie di associazioni per contiguità già bene stabilite, cui i suddetti antecedente e conseguente vengono riattaccati come estremi.

Pertanto, *nella tendenza alle spiegazioni metafisiche, considerata sotto l'aspetto fisiologico, ravvisiamo l'espressione di una legge di minimo sforzo, per cui le nuove associazioni rappresentanti rapporti causali tendono ad effettuarsi attraverso le vie associative, già segnate da altri processi abituali.*

Tali sono le conclusioni induttive di un'analisi che, esposta con tutte le riserve sembraci non dovere essere giudicata ricerca temeraria ed inane, neppure da chi sia meno disposto a scorgere in essa un passo qualsiasi verso la soluzione di un alto problema.

ä

gini, ma la *condizione fisiologica del loro associarsi*. E ciò spiega il sentimento di necessità che si accompagna a codesta associazione.

Le osservazioni precedenti ci palesano la differenza fisiologica tra i due ordini di rappresentazioni causali, in cui l'antecedente e il conseguente sono i fenomeni estremi di una serie continua, oppure restano invece nettamente distinti. Nel caso delle così dette *spiegazioni metafisiche*, la serie continua dei fenomeni che lega la causa all'effetto non è realmente data, ma semplicemente supposta.

Il valore psicologico di una tale supposizione si lascia agevolmente comprendere : essa costituisce un *termine medio* tra l'antecedente ed il conseguente che voglionsi legare in un rapporto causale; questo termine medio è una serie di associazioni per contiguità già bene stabilite, cui i suddetti antecedente e conseguente vengono riattaccati come estremi.

Pertanto, *nella tendenza alle spiegazioni metafisiche, considerata sotto l'aspetto fisiologico, ravvisiamo l'espressione di una legge di minimo sforzo, per cui le nuove associazioni rappresentanti rapporti causali tendono ad effettuarsi attraverso le vie associative, già segnate da altri processi abituali.*

Tali sono le conclusioni induttive di un'analisi che, esposta con tutte le riserve sembraci non dovere essere giudicata ricerca temeraria ed inane, neppure da chi sia meno disposto a scorgere in essa un passo qualsiasi verso la soluzione di un alto problema.

CAPITOLO IV.

LA GEOMETRIA

A - Il significato reale della Geometria.

§ 1. Introduzione.

Alla Geometria sembra doversi concedere un posto d'onore nel campo degli studii filosofici!

In Grecia essa fu mezzo possente di educazione intellettuale, e unitamente alla Rettorica, contribuì ad edificare la scienza del ragionamento; alla quale la nuova critica geometrica reca oggi ancora, come si è visto, una vivida luce. D'altra parte il movimento del pensiero che accompagna il sorgere della nostra civiltà europea, s'inizia con una scuola di filosofi geometri. Discende infatti da DES CARTES, e riceve poi nuovo impulso dal LEIBNIZ, quella filosofia razionalista che, nella controversia coll'empirismo, educò gli spiriti, facendosi istrumento del progresso onde uscirono le moderne vedute. Anche i due pensatori che hanno esercitato la massima influenza sulla speculazione del secolo decimonono EMANUELE KANT e AUGUSTO COMTE, attinsero in gran parte la loro forza ad una educazione geometrica. Ma soprattutto il progresso della Geometria in questo secolo è venuto ad agire direttamente sopra lo sviluppo del razionalismo, che allontanatosi dal suo paese di origine si librava in più alti e arditi voli, mediante un resultato veramente meraviglioso: la costruzione delle Geometrie non euclidee. Per la quale si rese manifesto che le nostre nozioni geometriche, in quanto si riferiscono alla realtà sensibile, non possono in alcun modo pretendere a quella rigorosa certezza, che fu tenuta come uno degli argomenti più forti in favore del loro carattere a priori.

Nuove idee e più arditi sviluppi della filosofia geometrica nascono da codesta veduta, e per più vie tendono ad illuminare il problema fisico della struttura dello spazio; dalle ricerche di GAUSS, LOBATSCHEWSKY, BOLYAI, RIEMANN, HELMHOLTZ, fino alle più recenti, che abbiamo esposte nel nostro articolo sui « Principii della Geometria » citato a pag. 117, ed alle quali accenniamo in parte nei seguenti paragrafi.

§ 2. **Realismo e nominalismo.**

Contro gli accennati sviluppi, o almeno contro l'interpretazione loro, accolta generalmente dai matematici, si solleva ancora dai filosofi della scuola kantiana la tesi pregiudiziale: non potersi parlare della Geometria come di una scienza fisica, perchè lo spazio non risponde ad alcun oggetto reale, ma esprime soltanto una forma subiettiva della sensibilità.

E questa tesi nominalistica si rinnova, sotto altra veste, in più recenti sviluppi critici.

La controversia fra il realismo e il nominalismo geometrico, è una delle più delicate ed importanti per riguardo alla filosofia in generale. E si tratta non tanto di decidere fra due opinioni contraddittorie nettamente poste, ma, come spesso accade, di determinare il senso in cui le due tesi possono tenersi valide, senza contraddizione.

Da un tale esame risulterà dunque chiarito come il resultato negativo, a cui conducono certe posizioni del problema dello spazio, non tolga la possibilità di un modo legittimo di considerare il realismo geometrico, cui si collega il resultato positivo di mettere in luce i fatti contenuti nella Geometria.

Così alla tesi di KANT che nega l'esistenza di un oggetto reale rispondente alla parola « *spazio* », si oppone con HERBART il riconoscimento della realtà dei « *rapporti spaziali* »; e al nominalismo, recentemente sostenuto da POINCARÈ, che mette in luce come codesti rapporti non abbiano un significato reale *indipendente in modo assoluto dai corpi*, si contrappone una più precisa valutazione della Geometria, intesa come *parte della Fisica*.

§ 3. **Spazio e spaziale.**

Proponiamoci la domanda « che cosa sia lo *spazio* », e cerchiamo di rispondervi con una critica adeguata.

Consideriamo un corpo qualunque; sia p. es. un pezzo di rame, o di ferro ecc., il quale si trovi immerso nell'aria, o nell'acqua, o in un altro ambiente qualsivoglia. La nozione di codesto corpo ci permette di distinguere certe sensazioni che si riferiscono alla materia *dentro* o *fuori* di esso.

Innumerevoli casi, diversi per la costituzione materiale del corpo o del mezzo che lo contiene, presentano tuttavia qualcosa di comune, per cui *astraendo dalle particolarità sensibili che riattacchiamo al rame o al ferro, all'aria o all'acqua* ecc., acquistiamo la nozione di un « *modo speciale di separare la materia dalla materia* », che è il contenuto obiettivo dei concetti di *solido* e di *superficie*.

Ora si abbia p. es. una palla sferica, capace di divenire sempre più grande. Si dice che quando essa sia *divenuta infinita*, avrà riempito tutto lo spazio.

Non fa meraviglia che codesto procedimento trascendente, conduca ad

attribuire alla parola « spazio » un senso affatto illusorio! Invero, poichè la nozione di una sfera implica un modo di distinguere le sensazioni riferentisi al di dentro e al di fuori di essa, una sfera infinita, non corrispondendo ad alcuna separazione di tal genere, non ha più alcun significato reale. Ed ecco come lo spazio, definito in tal modo, resta un nome vano senza soggetto.

Occorre prolungare una siffatta critica negativa? Ci sovviene invincibilmente al pensiero, il ragionamento di Don Ferrante nei « Promessi Sposi » del MANZONI, per cui egli dimostra che il contagio della peste non può essere sostanza nè accidente....

La stessa analisi svolta mette in luce che, all'infuori del senso trascendentale della parola, resta un significato fisico effettivo ai *rapporti spaziali o di posizione dei corpi*, il cui insieme può ancora essere denotato colla parola « spazio », positivamente presa.

Che invero codesti rapporti contengano una conoscenza reale, risulta da ciò che le relazioni di allineamento, equidistanza ecc. corrispondono ad un accordo fisso fra certi atti volontarii e le sensazioni che ne seguono. Anzi nulla di più fisso e preciso delle previsioni geometriche.

§ 4. **Critica dei rapporti spaziali.**

L'accezione della parola « spazio » che designa un corpo infinitamente grande, non è la sola che riposi sopra un procedimento di definizione trascendente e conduca perciò ad una conclusione nominalistica. Anche i rapporti spaziali possono venire intesi trascendentalmente, sia attribuendo un senso *assoluto* alla loro *generalità*, sia accordando loro una *infinita esattezza*, due modi d'interpretazione che appariscono del resto legati l'uno coll'altro.

La generalità della Geometria consiste in questo, che: le distinzioni spaziali *non dipendono* dalla materia che viene distinta, p. es. come al di fuori o al di dentro rispetto ad una sfera data. Ora tale indipendenza significa soltanto la coesistenza o la possibilità di tante distinzioni analoghe riferentisi ugualmente a *materie diverse*, non una relazione fisica *assolutamente generale, propria dello spazio in sè*, la quale conservi un senso *all' infuori di ogni materia*.

La pretesa di dare alla Geometria un significato prescindente dai corpi si collega a quella di cercare nei suoi rapporti una infinita o assoluta esattezza. Imperocchè, respinta codesta interpretazione della generalità geometrica, l' esattezza che spetta alla dottrina matematica, non può essere riportata al mondo fisico in una immediata applicazione di essa, da chi osservi che niun oggetto reale cade sotto i concetti matematici di « punto », « linea », « superficie », « retta », « piano », « distanza » ecc.

All'ovvia constatazione della non sussistenza di tali oggetti, si può aggiungere anzi che, nella realtà fisica, non è neppur dato di accostarsi oltre

un certo limite al modello di una delle suddette figure geometriche; si trova anzitutto un limite relativo ai nostri sensi, che tuttavia può venire rimosso col sussidio di opportuni istrumenti; ma s'incontra ancora un nuovo limite nella imperfezione di questi, e non soltanto sotto l'aspetto pratico bensì anche in quello teorico, così p. es. la lunghezza delle onde luminose costituisce un limite teoricamente non sorpassabile alla precisione della vista, comunque munita di microscopio.

§ 5. **Il nuovo nominalismo di H. Poincarè.**

L'impossibilità di dare ai rapporti spaziali dei corpi un senso che prescinda dai corpi stessi, e la non esistenza di oggetti reali rappresentati dai concetti matematici di « punto », « linea » ecc., viene interpretata da H. POINCARÈ [1] come una refutazione decisiva del realismo geometrico.

Sebbene nell'opera citata non si trovi una critica preventiva di ciò che può significare lo « spazio », il senso trascendente che l'autore attribuisce alle relazioni geometriche risulta chiaro da qualche brano dei suoi scritti che qui riportiamo :

« Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux : aucune d'elles ne porte ni peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels de l'espace » (op. cit., pag. 100).

« Direz-vous que si les expériences portent sur les corps, elles portent du moins sur les propriétés géométriques des corps. Et d'abord, qu'entendez-vous pour propriétés géométriques des corps? Je suppose qu'il s'agit des rapports des corps avec l'espace.... » (op. cit., pag. 101).

« .... il n'existe pas de propriété qui puisse.... être un critère absolu permettant de reconnaître la ligne droite et de la distinguer de toute autre ligne.

« Dira-t-on par exemple : — cette propriété sera la suivante : la ligne droite est une ligne telle qu'une figure dont fait partie cette ligne peut se mouvoir sans que les distances mutuelles de ses points varient et de telle sorte que tous les points de cette ligne restent fixes? —

« Voilà en effet una propriété qui.... appartient à la droite et n'appartient qu'à elle. Mais comment reconnaîtra-t-on par expérience si elle appartient à tel ou tel objet concret? Il faudra mesurer des distances, et comment saura-t-on que telle grandeur concrète que j'ai mesurée avec mon instrument matériel représente bien la distance abstraite? » (pag. 94-95).

Ora da tali osservazioni risulta soltanto confermata la conclusione già enunciata innanzi, e del resto evidente : i rapporti geometrici *puri* sono una astrazione cui non risponde nulla di reale; i concetti geometrici elementari

[1] Cfr. « Science et hypothèse », Paris, Flammarion, senza data.

(punto, retta ecc.) sono parimente un'astrazione che non trova esatto riscontro in alcun oggetto. Essi servono dunque come *simboli* ad esprimere certi rapporti di posizione dei corpi, che vengono enunciati mediante le proposizioni della Geometria.

Se l'analisi del Poincarè si limitasse a questo, essa sarebbe invero irrefutabile. Ma l' illustre autore è andato più avanti, concludendo che le stesse proposizioni geometriche non coprono alcun fatto reale, ma debbonsi ritenere come un puro *sistema di convenzioni*, mediante le quali si esprimono i fatti fisici, così come le grandezze si riferiscono ad un sistema di misure. Il sistema può esser comodo, ma nulla vieta di cambiarlo. Domandare se un fenomeno sia possibile secondo una certa ipotesi geometrica e impossibile nell'opposta, equivale a domandare se vi sono delle lunghezze esprimibili in metri e non in piedi inglesi (cfr. op. cit., pag. 93).

Questa conclusione non ci sembra accettabile. Infatti, la circostanza che le proposizioni geometriche vengono teoricamente espresse mediante rapporti fra concetti, che nella loro accezione matematica sono da ritenere come simboli, non basta a conferir loro una convenzionale arbitrarietà rispetto al mondo fisico, dove quei simboli trovano una rispondenza approssimativa in certi oggetti, da essi in tal modo rappresentati.

Ad eliminare i dubbi, Poincarè ha cercato di convalidare la sua tesi con talune geniali costruzioni artistiche; si tratta di immaginare condizioni fisiche per le quali *lo stesso spazio* in cui viviamo *apparirebbe dotato di proprietà differenti* da quelle della nostra Geometria. E basta a tal uopo supporre che i corpi, movendosi si deformino secondo certe leggi, ad es. per effetto di un mutamento di temperatura *che dipenda dalla loro posizione*, che la luce non si propaghi in linea retta, subendo l'effetto di un mezzo rifrangente *distribuito opportunamente in un campo spaziale* ecc. (op. c., pag. 84 e seg.).

Ma un esame approfondito di codesti esempii, mostrerà come le ipotesi suddette, ove si interpretino positivamente, con riguardo alla relatività delle nostre conoscenze, implichino un *reale* cambiamento dello spazio, cioè dei rapporti significati con questo nome.

Nel nostro mondo i corpi misurabili, gli uni rispetto agli altri, grazie alla possibilità che ci è data di muoverli indipendentemente dalla variazione del loro stato fisico : il riscaldamento, il raffreddamento o la pressione, modificano è vero i termini del confronto richiesto dalla misura, ma queste modificazioni sono accidentali per r'guardo alla posizione reciproca dei corpi stessi, e perciò la Geometria non ha da tenerne conto.

Nel modo immaginato da Poincarè la temperatura sarebbe invece un vero *carattere geometrico*, giacchè tutti i corpi (compreso il nostro organismo) avrebbero la temperatura appartenente al posto che essi occupano; non essendo più possibile di portare a contatto e quindi di confrontare le dimensioni di corpi

diversamente caldi, non si potrebbe più dire che « i corpi si dilatano colla temperatura ». Pertanto, nel mondo suddetto, la Geometria sarebbe *realmente* e non solo *apparentemente* diversa dalla nostra.

L'affermazione contraria prende la realtà come opposta alla apparenza in un senso trascendentale; oppure contraddice ai dati dell'ipotesi, introducendo surrettiziamente, in quel mondo, un giudice fatto a *nostra* immagine, che si sottrae alle leggi in esso stabilite!

Si può istituire una critica analoga relativamente all'ipotesi che la luce non si propaghi in linea retta.

Nulla di più facile, da un punto di vista astratto, che accettare una tale ipotesi! Non viene essa realizzata di fatto, in un qualunque mezzo eterogeneo, secondo le leggi della rifrazione?

Ma l'eterogeneità del mezzo, che si può constatare con appropriate esperienze fisiche, è ancora rispetto al fenomeno qualcosa di accidentale; le traiettorie dei raggi luminosi possono in questo caso essere *cambiate*, alterando la disposizione del mezzo stesso nel campo delle nostre esperienze. Che cosa significherebbe invece un mezzo eterogeneo, con una distribuzione spaziale fissata, un etere p. es. diversamente costituito, le cui parti non mutino le une rispetto alle altre col muoversi dei corpi? Non si creerebbe con questa ipotesi un *mondo geometrico* diverso dal nostro, che riconosciamo come *omogeneo*?

Ad approfondire tali questioni giova rendersi conto del significato fisico della « linea retta ».

Il concetto della retta scaturisce dallo studio di diversi ordini di fenomeni:

1) da quello dei movimenti dei corpi *solidi*, ove la retta si presenta come *asse* i cui punti restano immobili in una rotazione (quindi come filo teso ecc.);

2) dalla Dinamica dei *punti materiali*, ove la retta si presenta come *traiettoria* di un punto, il cui movimento non sia modificato dalla permutazione dei corpi circostanti;

3) dall'Ottica, e in generale dallo studio delle radiazioni, ove la retta si presenta come *raggio* o linea di simmetria del fenomeno, in un qualsiasi mezzo ambiente che, mediante determinate esperienze di confronto, possa ritenersi *omogeneo*.

Principalmente la prima e la terza proprietà della retta, valgono a definirla rispetto ai nostri sensi, del tatto e della vista; mentre la seconda potrebbe forse servire di base ad una definizione di essa relativamente al senso muscolare.

Ora, così l'una come l'altra di queste definizioni della « retta » permettono di fondare un sistema geometrico; in particolare si possono avere, una *Geometria (metrica) dei solidi*, ed una *Geometria ottica (o proiettiva)*.

L'accordo dei varii modi di riguardare la retta, come asse e come raggio, è un fatto fondamentale per cui ci è dato di cogliere i due diversi ordini di feno-

meni in una *unica rappresentazione geometrica*. Alla quale anche gli altri fenomeni noti, ed in ispecie i dinamici, si lasciano ricondurre.

Il fondamento di codesta rappresentazione è che certe condizioni di omogeneità del mezzo portino una *simmetria dei fenomeni* rispetto a certe linee; tale rapporto di dipendenza costituisce nel suo vero senso fisico l'*omogeneità dello spazio*.

Nulla vieta d'immaginare che le molteplici concordanze, il cui insieme viene enunciato colla simmetria anzidetta, non sussistano realmente, quando si esaminino i fatti con esperimenti più precisi; ma, in tal caso, si tratterebbe di ben altro che di rettificare semplicemente una proposizione della teoria della luce; imperocchè l'insieme dei fatti che vengono significati dalla *ipotesi della linea retta* riuscirebbe smentito in quell'ordine progredito di approssimazione.

§ 6. **La Geometria come parte della Fisica.**

I filosofi che, conferendo alla Geometria un senso trascendente, vengono condotti al nominalismo, appariscono vittime di una illusione fondamentale che deriva dal riguardare le conoscenze come *compiute*, nell'aspetto *attuale*, senza tener conto della loro *genesi*.

Questa è appunto la veduta della Scienza, che KANT ha tratto dalla sistemazione di NEWTON; la gerarchia scientifica, nella quale i rapporti più complessi appariscono subordinati ai più semplici, viene presa da lui in un senso gnoseologico assoluto.

Così in particolare, la circostanza che la Geometria *preceda* in una esposizione dommatica la Meccanica e la Fisica, e che le cognizioni geometriche stieno alla base dello stesso metodo sperimentale nelle ricerche fisiche, si converte in un rapporto di dipendenza necessaria che trova la sua espressione nell'« a priori » kantiano. E, risalendo dalla critica della conoscenza scientifica alla critica della conoscenza volgare, l'intuizione dei rapporti di spazio, che presiede ai processi associativi delle nostre sensazioni attuali (della vista e del tatto), è riguardata come a priori rispetto a queste sensazioni; separato dai dati sensibili (presi fittiziamente come elementi semplici ed isolati nello spazio e nel tempo), l'ordine spaziale viene concepito come un *quadro* che la mente vi aggiunge, ed in cui essi trovano posto.

Ora tutta questa costruzione gnoseologica è stata superata da una veduta più adeguata dello *sviluppo* delle conoscenze, che costituisce il più sicuro acquisto della filosofia evoluzionista.

Il fatto generale che l'esperienza si interpreta per mezzo di conoscenze anteriori, e che ogni fase del progresso scientifico è analogamente sottomessa ad una fase precedente, si accetta oggi in un senso diverso; non più stabilendo una gerarchia assoluta delle scienze, ma riconoscendo il graduale sviluppo di ciascuna, per cui certe nozioni più semplici o suscettibili di maggior pre-

cisione si distaccano dalla massa dei dati empirici bruti, fino a costituire un corpo di dottrina relativamente autonomo.

Pertanto la Geometria anzichè essere ritenuta come necessariamente precedente alla Fisica, viene ad esserne considerata una parte, assorta ad un alto grado di perfezione in virtù della semplicità, della generalità e della relativa indipendenza dei rapporti in essa compresi.

Ora quando le proposizioni geometriche sieno prese in un senso fisico, le previsioni concrete che esse contengono risultano legate ad elementi di fatto che si considerano di solito come non geometrici. Perciò i teoremi della Geometria teorica appariscono soltanto come l'espressione simbolica di rapporti fisici, incompiutamente enunciati, che vengono determinati nelle applicazioni concrete.

Rispetto a queste, la forma precisa dei teoremi rappresenta soltanto un grado di approssimazione, che può essere spinto più innanzi ove si convertano le *eguaglianze* in *diseguaglianze*, come si vede nell'esempio che segue:

Consideriamo il teorema « gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali ».

Nella realtà esistono degli oggetti (*triangoli fisici*) che, con una certa approssimazione, si lasciano rappresentare dal concetto del triangolo.

Costruiamo uno di questi modelli, con tre sbarre sottili di ferro o con un disegno sulla carta. Misuriamone col metro due lati, col goniometro i due angoli opposti.

La misura reale di un lato è rappresentata da due numeri, la cui differenza (sia m. 0,0001) è relativa alla perfezione dell'istrumento; essa si esprimerà dicendo che la lunghezza del lato vale p. es. m. 3,4576, a meno di un decimo di millimetro per difetto, cioè che essa è compresa fra m. 3.4576 e m. 3,4577.

Se i due lati del triangolo in questione sono misurati ugualmente, nel senso anzidetto, dal numero 3,4576, il triangolo si riterrà come « isoscele »; la nostra premessa è dunque che « i due lati sono uguali a meno di m. 0,0001 ».

Ora la misura dei due angoli del triangolo, opposti ai lati suddetti, ci viene data dal goniometro.

Il teorema enunciato di sopra ci avverte che la differenza tra i due angoli sarà molto piccola, e quindi le loro misure saranno uguali in un ordine d'approssimazione dipendente da quello in cui la premessa (relativa ai lati) trovasi verificata.

Ma questa è soltanto una indicazione vaga.

Quando si voglia il significato preciso del teorema nella realtà, bisogna trasformarlo nel modo seguente:

« Se due lati di un triangolo differiscono per meno di una certa lunghezza ε, i due angoli opposti differiranno per meno di una quantità τ, dipen-

dente da ε secondo una certa legge ». Ed occorre quindi completare il teorema stesso col trovare una funzione $f(\varepsilon)$ tale che sia, per ε inferiore a un certo limite, $\tau < f(\varepsilon)$. [1].

Con un facile calcolo si trova (essendo τ espresso in gradi)

$$\tau < 61. \frac{\varepsilon}{a},$$

dove a esprime, a meno di ε per difetto, la lunghezza dei lati sensibilmente uguali del nostro triangolo; nel nostro caso

$$(\varepsilon < 0{,}0001, \qquad a > 3)$$

si avrà quindi

$$\tau < 1''.$$

Allorchè i teoremi della Geometria sieno convertiti da eguaglianze in diseguaglianze, nel senso illustrato innanzi, si riconosce che essi rappresentano una parte dei rapporti di posizione fra i corpi; quello che bisogna aggiungervi, nelle varie applicazioni concrete, tiene appunto alla natura di questi corpi stessi (al calore, alle forze che vi agiscono ecc.), ed è riguardato come estraneo alla Geometria teorica.

Sebbene la distinzione fra teoria ed applicazione s'introduca solo convenzionalmente a semplificare la veduta della realtà, codesta semplificazione è resa possibile dalla sussistenza di una *regolarità statistica* che si sovrappone alla *irregolarità dei fenomeni*, e si lascia interpretare colla supposizione di fatti geometrici generali e precisi riferentisi a condizioni ipoteticamente semplici.

§ 7. **Sull'esattezza della Geometria.**

Cerchiamo di spiegare ed approfondire questa considerazione, in ordine al modo di apprezzare l'*esattezza* della Geometria.

La verifica *diretta* di una proprietà geometrica, in ogni singolo caso, non può superare un certo limite d'approssimazione, il quale può essere segnato *a priori* in rapporto al limite che già abbiamo riconosciuto nella realizzazione degli oggetti stessi della Geometria. Ma se la proprietà anzidetta si considera come un'ipotesi relativa a condizioni teoricamente semplici, la verifica si allarga con tanti modi di prova indiretti, alla cui esattezza non può più segnarsi *a priori* limite alcuno.

[1] Sopra un tale ordine di questioni inerenti alla Geometria, come scienza fisica, ha richiamato l'attenzione F. KLEIN nelle sue belle lezioni dell'estate 1901. (Anwendung der differential-und integral Rechnung auf Geometrie. Leipzig, Teubner 1902).

In questo senso la Geometria appare come un sistema di *supposizioni generali*, il cui significato consiste nell'*insieme dei fatti* che ne derivano, e si connette perciò ad una serie di esperienze illimitatamente proseguibili.

Così appunto abbiamo già interpretato l'esistenza della linea retta come la supposizione di una generale simmetria fenomenica, alla quale possono riattaccarsi verifiche delle proprietà della retta molto più precise di quella che viene fornita immediatamente dalle proprietà degli assi di rotazione dei corpi solidi.

Importa di fissare questo punto: le verifiche indirette, legate alla supposizione di un rapporto geometrico, hanno un senso nonostante l'impossibilità di realizzare (nell'ordine di approssimazione richiesto) le condizioni semplici cui il rapporto stesso si riferisce.

Ciò risulta soprattutto luminosamente dalla considerazione statistica cui sopra accennammo. Negare l'ipotesi geometrica significa ammettere una causa di errore *sistematica* che, sovrapponendosi alle varie condizioni reali, può palesarsi in un gran numero di verifiche, come distinta dalle irregolarità *accidentali*.

Così, per riferirci ad un esempio già considerato innanzi, la imperfezione dei modelli e l'imprecisione delle nostre misure può bene lasciarci scorgere un errore nella verifica del teorema che « gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali », ma in un gran numero di costruzioni grafiche basate sul detto teorema, questi errori accidentali tendono a compensarsi. Onde in tal senso appare che l'inesattezza dell'*applicazione* non infirma l'esattezza del *teorema*.

Si provi invece ad eseguire replicatamente, in una serie di disegni, una costruzione approssimata, ad es. quella di SPECHT per la rettificazione della circonferenza; in tal caso s'introduce una causa d'errore sistematica, che diverrà sempre *più sensibile*, in un gran numero di esperienze.

Ora dunque l'*esattezza della Geometria* riceve un significato preciso: è un'ipotesi, in ogni momento del progresso scientifico verificata *fino ad un certo punto*, dalle esperienze fatte, la quale anticipa il resultato di altre esperienze possibili. Ed è chiaro che codesta ipotesi non potrà mai essere definitivamente provata, poichè la serie delle esperienze possibili è illimitata; nulla osta invece che essa possa venire *negata*.

Tuttavia non si giunge a comprendere bene il dubbio che qui si solleva, se non facendo vedere come si riesca ad immaginare un'ipotesi opposta, altrettanto definita e coerente come la Geometria ordinaria.

Questo appunto fu dato dalla costruzione della Geometria non-euclidea, la quale dimostrò che, senza contraddire i fatti su cui si basano le definizioni degli enti geometrici fondamentali, si possono fare delle ipotesi inconciliabili

coll'esattezza della ordinaria Geometria, che si esprimono invece con *una vera e propria Geometria, diversa dalla nostra.*

§ 8. **Lo spazio come concetto : la Geometria astratta.**

Ad evitare malintesi, cominciamo dall'osservazione seguente :

Lo spazio, riguardato nella mente del geometra, non è soltanto una intuizione, secondo la quale si ordinano le immagini sensoriali, bensì è anche un *concetto*, come i geometri non hanno cessato di affermare da LEIBNIZ in poi.

È un torto della critica kantiana di avere disconosciuto questo significato psicologico della parola « spazio », di cui non può fare a meno la Geometria, se voglia rivestire la forma logica di una scienza deduttiva.

Vanamente si obietta che un concetto suppone più determinazioni possibili, laddove lo spazio risponde ad un particolare determinato. Coloro che attribuiscono ancora un valore a codesto vecchio argomento, sembrano ignorare il significato logico, astratto, che lo spazio ha acquisito presso i geometri contemporanei.

Il concetto dello spazio, nella sua accezione matematica, rappresenta l'insieme dei rapporti (geometrici) fra i *punti*, fatta astrazione delle sensazioni particolari che si riattaccano all'immagine del punto. Lo spazio viene così pensato come una *varietà di elementi qualunque*, cui si dà il *nome* di « punti », perchè sono dati in certe relazioni di ordine atte a rappresentare, con una grande approssimazione i rapporti di posto intercedenti fra i corpi molto piccoli (*punti fisici*).

Abbiamo già avuto luogo di ricordare, come PLUECHER abbia insegnato a trar profitto da questa indeterminazione, che si lascia all'oggetto denotato colla parola « punto », per studiare, sotto il nome di spazio, forme geometriche molto diverse.

Si dia, p. es., il nome di « punti » ai « cerchi » d'un piano, e si fissi, in modo conveniente, ciò che si vuole intendere per « distanza » di due cerchi, e quali sistemi di cerchi si vogliano designare col nome di « rette » e di « piani ». Queste definizioni debbono essere poste in modo, che le elementari proprietà geometriche relative allo spazio ordinario (postulati), si traducano in proposizioni valide per la Geometria dei cerchi.

Quando tale condizione sia soddisfatta, viene stabilito un riscontro fra lo spazio ordinario di punti, e codesto spazio convenzionale di cerchi; ad ogni figura di punti si contrappone una *figura di cerchi*, ed ogni proposizione concernente la prima si traduce, secondo la *dualità* posta, in una proposizione concernente la seconda.

Quando si prosegue il principio di Pluecher, nel campo delle applicazioni geometriche, sembra naturale di porre a riscontro collo spazio fisico

anche delle varietà di elementi, nelle quali vengano soddisfatte soltanto in parte le proprietà che esprimono la traduzione dei postulati geometrici.

Si dà origine così ad una serie di *spazii astratti*, nei quali valgono *Geometrie diverse*, costruite tuttavia sopra un fondamento comune.

Ad es. si concepisce una serie di spazii non-euclidei, ove il postulato delle parallele non si trovi soddisfatto; e questa serie, dipendente dal valore di una certa costante, impropriamente detta *curvatura*, viene a cadere sotto il concetto di uno spazio, più generale dell'ordinario.

Per una ulteriore generalizzazione, si può abbracciare in codesto concetto la serie degli *spazii a più dimensioni*, o ancora altre varietà più lontane dallo spazio fisico.

Non si deve imporre alcun limite a questo processo di generalizzazione, dipendente soltanto da una *convenzione*, che il matematico giudica utile di stabilire nell'interesse dei suoi studii.

La teoria degli spazii astratti è veramente una parte essenziale dell'edificio geometrico, elevato nel secolo scorso!

Lasciando di considerare ciò che essa ci ha appreso, nel campo della Analisi matematica, fermiamoci piuttosto a vedere quale interesse possa avere pel filosofo.

L'interesse è duplice, sia per quanto si riferisce alla questione dello spazio fisico, sia per quel che concerne l'origine e lo sviluppo delle nostre conoscenze geometriche.

§ 9. **Cenni storici intorno alla costituzione della Geometria non-euclidea.**

Dall'epoca d' EUCLIDE, fino ai principii del secolo scorso, era universalmente ammesso che noi possediamo nel concetto dello spazio, quale esso risulta definito dagli assiomi e dai postulati della Geometria greca, una rappresentazione rigorosamente esatta dei rapporti fisici di posizione.

Dubitare di tale esattezza doveva apparire follia agli occhi di ognuno, finchè la rappresentazione suaccennata veniva pensata come *unica possibile*. Onde non è temerario supporre che il più possente genio non sarebbe mai pervenuto ad una critica così ardita, se non vi fosse stato condotto da un difetto nella costruzione logica della Geometria euclidea.

Poichè si credeva allora che le proposizioni fondamentali della Geometria avessero il carattere di assiomi necessarii come gli assiomi logici e di natura non diversa, mal ci si voleva rassegnare ad aggiungere a questi la proposizione, in qualche modo meno evidente, che costituisce il V postulato di Euclide sulle parallele.

Giova ricordare a questo punto che cosa richieda quel postulato, e quale sia il contenuto delle premesse cui si appoggia la Geometria euclidea.

Nel concetto di Euclide, la Geometria riposa su definizioni, nozioni comuni e postulati. Questi ultimi, chiedendo la possibilità di certe costruzioni elementari, hanno lo scopo di affermare l'*esistenza* degli enti fondamentali della Geometria, conformemente all' ufficio che i greci attribuivano appunto alla costruzione geometrica (ZEUTHEN).

Ma veramente altre ipotesi, nettamente distinte dagli assiomi logici, sono contenute in modo implicito tanto nelle definizioni, che nelle nozioni comuni dell'Euclide. E la critica moderna, assumendo i fondamentali concetti geometrici come non definiti, le enuncia egualmente sotto il nome di *postulati* (cap. III).

Esistono varii modi di enunciare ed ordinare le premesse occorrenti alla Geometria euclidea [1]. Ci sia concesso di riferirci alla disposizione che informa la nostra raccolta di « Questioni riguardanti la Geometria elementare » [2], attuata, in armonia coi nostri criterii pedagogici, negli « Elementi di Geometria » [3] da noi redatti insieme ad U. AMALDI, perchè ivi appunto viene messo appositamente in luce tutto ciò che precede l'ipotesi sulle parallele.

Annoveriamo dunque le premesse che concernono :

1) I postulati relativi alla determinazione di rette e piani e alla loro mutua appartenenza;

2) le proprietà fondamentali della *linea retta*, come sistema di punti (*ordini naturali*, *segmenti* ecc.) [4];

3) le proprietà della *superficie piana* rispetto alle sue rette (divisione in parti, angoli);

4) la divisione in parti dello spazio rispetto ad un piano;

5) la possibilità dei *movimenti*, cioè i principii della *congruenza* delle figure (da cui seguono i teoremi sui triangoli congruenti o uguali ecc.).

6) il postulato delle paralelle (post. V di Euclide) :

Se due rette, in un piano, sono tagliate da una terza per modo che la somma degli angoli coniugati formati con questa da una medesima parte sia minore di due angoli retti, le due rette prolungate s'incontreranno dalla parte suddetta.

A questo postulato (che si può anche sostituire con l'affermazione della unicità della parallela per un punto ad una retta data ecc.) si riferiscono in-

(1) Cfr. il nostro articolo sui Principii citato a pag. 117.

(2) Bologna, Zanichelli, 1900.

(3) Bologna, Zanichelli, 1903; 2ª ed., 1905.

(4) Tra queste proprietà si trova la *continuità* della retta. Questa non compare in Euclide, dove trovasi surrogata in qualche punto da proposizioni particolari che ne dipendono. Si confronti l'art. IV di G. VITALI nei collectanea di F. ENRIQUES « Questioni.... », op. cit.

numerevoli tentativi di dimostrazione, incominciati coi primi commentatori di Euclide (PROCLO, NASIR EDDIN....) e proseguiti fino a LEGENDRE.

Ma le dimostrazioni proposte, o esplicitamente o nascostamente, ricorrono a qualche altra proposizione, equivalente al postulato V di Euclide, e non contenuta nel corpo di proprietà geometriche basato sulle ipotesi 1) .... 5).

Senza addentrarci nella storia dei tentativi sopra citati, giova a noi e basta tener presenti pochi nomi e poche date, che si legano più da vicino alla costituzione della Geometria non euclidea [1].

JOHN WALLIS (1663) ha rilevato che il postulato delle parallele è necessario fondamento della teoria della similitudine, diguisachè dall'ammettere l'esistenza di triangoli simili si può dedurre la dimostrazione di quel principio.

GIROLAMO SACCHERI, nel suo « Euclides ab omni naevo vindicatus.... » (1773), parte dalla costruzione di un quadrilatero con tre angoli retti, e distingue le tre ipotesi che (in relazione alle proprietà 1) .... 5)) appariscono *a priori* possibili intorno al quarto angolo : che esso sia retto, ottuso o acuto. Dimostra che ciascuna di queste ipotesi si troverà verificata per *ogni* quadrilatero, nelle condizioni suddette, quando sia verificata in un caso particolare.

Stabilisce quindi, nei tre casi, la proprietà fondamentale di due rette di un piano perpendicolari ad una terza :

nella 1ª ipotesi esse saranno ovunque equidistanti (dal che segue il postulato euclideo delle parallele);

nella 2ª ipotesi, a partire dalla perpendicolare comune, andranno *avvicinandosi*;

nella 3ª ipotesi, all'opposto *divergeranno*.

L'ipotesi dell'angolo ottuso (2ª) viene quindi eliminata dal Saccheri, perchè contraddice all'*infinità della retta*. Contro l'ipotesi dell'angolo acuto l'autore ha addotto argomenti viziosi : ma egli era convinto *a priori* che tale ipotesi dovesse dimostrarsi impossibile !

Questo errore col quale termina l'opera del Saccheri, non toglie il pregio dei resultati da lui conseguiti, che noi abbiamo innanzi menzionati. Si aggiunga a questi il seguente :

Se vale l'ipotesi dell'angolo ottuso la somma degli angoli di un triangolo qualsiasi è sempre maggiore di due angoli retti; nell'ipotesi dell'angolo acuto essa è all'opposto minore di due retti. Se per un triangolo particolare la somma degli angoli è uguale a due retti, lo stesso accade per ogni triangolo, e sussiste l'ipotesi euclidea.

Quest'ultima conclusione è stata ritrovata, un secolo più tardi da LEGENDRE, al termine dei suoi lunghi studii sulla teoria delle parallele.

[1] Per la storia di essa, ed anche per uno sviluppo succinto delle teorie che la costituiscono, vedasi l'art. VI di R. BONOLA nella nostra citata raccolta

J. H. LAMBERT, nella sua « Theorie der Parallellinien », pubblicata nel 1786 e scritta, pare, venti anni prima, discute nuovamente le tre ipotesi del Saccheri, il cui lavoro, secondo una plausibile supposizione del SEGRE, potè essergli conosciuto. Conclude che l'ipotesi dell'angolo acuto non può essere così facilmente rigettata come l'altra contraddicente all'infinità della retta.

Sorvolando sull'opera di F. C. SCHWEIKART e di F. A. TAURINUS, che la critica storica di ENGEL e STAECKEL ha rivendicato tra i più prossimi precursori della Geometria non euclidea, possiamo dire che la costituzione definitiva di questa è dovuta a GAUSS, LOBATSCHEWSKY e BOLYAI.

Gli studii del primo, incominciati tra il 1792 e il 1797 proseguirono fino al 1832, e ci sono noti soltanto attraverso lettere del grande geometra.

L'opera di Lobatschewsky è contenuta nelle pubblicazioni, incominciate nel corriere di Kazan col 1826, mentre la prima pubblicazione sull'argomento del suo confratello ungherese risale al 1829.

Da Lobatschewsky e Bolyai sono svolte, senza arresti, le conseguenze della terza ipotesi del Saccheri, nella quale due rette di un piano perpendicolare ad una terza vanno divergendo; sono queste conseguenze che vengono a formare un corpo coerente di dottrina geometrica *astratta*, denominato da Gauss « Geometria non euclidea ».

Da tali sviluppi scaturisce la prova della *impossibilità di dimostrare il postulato d'Euclide sulle parallele*, deducendolo dalle premesse sopra accennate.

Questa prova è implicitamente fornita dalle formule della trigonometria non euclidea, date da Lobatschewsky e Bolyai. Tuttavia i suddetti geometri non riuscirono a metterla in luce, così da escludere che, proseguendo nello studio della Geometria non euclidea, si pervenga mai ad una contraddizione. E lo stesso Gauss, che per proprio conto era giunto da lungo tempo ai principali teoremi di codesta Geometria, sembra aver acquistato la convinzione della sua possibilità logica, soltanto verso il 1830.

Questi particolari non hanno oggi che un interesse storico. La possibilità logica della Geometria non euclidea, e quindi l'indimostrabilità (nel senso accennato) dell'ordinario postulato delle parallele, è ormai fuori questione.

E di più si è pur riconosciuto che anche un' *altra* Geometria è possibile, ove si tolga dalle premesse 1) .... 5) l'ipotesi della infinità della retta, (prendendo la retta come una *linea chiusa*); si ha allora un corpo di dottrina geometrica astratto, che prende il nome da RIEMANN, altrettanto coerente come la Geometria di Lobatschewsky. Mentre questa corrisponde allo svolgimento della ipotesi dell'angolo acuto considerata dal Saccheri, la Geometria di Riemann risponde all'ipotesi dell'angolo ottuso.

Ma non possiamo proseguire il racconto degli ulteriori acquisti, conse-

guiti dalla scienza matematica in tale ordine d'idee; e lasciamo pertanto di dire quali contributi abbiano portato a questi studii dei geometri come HELMHOLTZ, BELTRAMI, CAYLEY, KLEIN, CLIFFORD, LIE, POINCARÈ, VERONESE, HILBERT [1].

Vi accenneremo in parte nel seguito. Seguiamo ora i fondatori della Geometria non euclidea nelle concezioni filosofiche suggerite dalla loro scoperta.

§ 10. **Il problema dello spazio.**

È un carattere peculiare dello spirito umano di essere portato a cercare nel mondo reale i modelli concreti delle sue creazioni. Questa disposizione passa quasi inavvertita presso le menti non nutrite di studii astratti, poichè i concetti che esse formano, resultato di associazioni prossime dei dati sensibili, si presentano appunto, fin da principio, come rappresentanti di oggetti reali. Tuttavia anche in questi casi, il procedimento che estende l'osservazione sperimentale è un procedimento di astrazione, pel quale si genera un concetto, cui si tendono a subordinare immediatamente le osservazioni nuove.

Ma quando si tratta di spiriti coltivati nelle scienze astratte, il processo costruttivo dei concetti si allontana smisuraamente dalle associazioni prossime dei dati sensibili, onde la creazione ideale che ne risulta appare completamente fuori della realtà; perciò appunto la ricerca di oggettivare l'astratto ci colpisce come un carattere peculiare di quelle menti.

Se qualcuno crede che questo sia un difetto riprovevole degli intelletti matematici, si può ben dire che il suo esame non ha oltrepassato la superficie della questione!

Giacchè il difetto dello spirito matematico, nei suoi minori rappresentanti, è precisamente tutto il contrario; cioè di non comprendere che un pensiero, il quale si appaghi di costruzioni astratte, senza la speranza, pur vaga, di cogliere in esse il quadro di una qualche realtà, sarebbe uno sterile istrumento dialettico.

« Scorgere in ogni concetto astratto, comunque definito con un processo logico costruttivo, la rappresentazione *possibile* di una realtà », tale è la veduta direttrice di quanti sposano alla facoltà di astrazione, una coscienza elevata dello scopo scientifico per cui essa viene esercitata.

Nè alcun rimprovero può farsi a chi cerchi codesto reale *possibile*, attraverso costruzioni ideali che si allontanano dai dati dell'osservazione immediata; tanto varrebbe rimproverare al genio l'ardire delle ipotesi, colle quali ei cerca di vedere al di là delle nebbie che limitano il comune orizzonte.

Questo ardire allora soltanto diverrà riprovevole, quando la ipotesi pos-

[1] Cfr. il nostro citato articolo sui Principii.

sibile sia accettata come vera o probabile senza adeguata verificazione, o comunque preoccupando il ricercatore adombri la veduta dei fatti che ad essa si palesino contrarii.

I fondatori della Geometria non-euclidea, accordando ai loro sviluppi astratti il valore di un'ipotesi reale, furono certamente arditi; ma, come vedremo, essi non meritano il rimprovero cui sopra abbiamo accennato. Matematici, essi furono insieme filosofi, proponendo una questione che segna la più alta vittoria dello spirito critico; e come filosofi furono, nel miglior senso, positivisti, poichè cercarono una risposta ai loro dubbi nel fatto, e questo valutarono con giudizio sereno.

Mentre KANT lavorava a dimostrare il carattere psicologico dell'intuizione spaziale, cercando di distruggerne il senso fisico, GAUSS rivolgeva la sua attenzione alle più precise misure degli angoli del triangolo geodetico Brocken, Hohehagen, Inselberg [1], per trarne la dimostrazione sperimentale della Geometria nell'ordine di approssimazioni che occorre considerare sulla nostra terra; e LOBATSCHEWSKY interrogava le parallassi delle stelle lontane, se anche in un tale ordine di misure sia da tenersi per valida la ordinaria teoria delle parallele, o se debba rimpiazzarsi colla teoria non euclidea, secondo la veduta già affacciatasi allo spirito di SCHWEIKART, che a quella Geometria aveva dato il nome di « astrale ».

Vediamo di renderci conto del valore di tali esperienze.

Per quanto abbiamo detto la questione delle parallele si può decidere, *teoricamente*, dall'ispezione di un solo triangolo: se in questo la somma degli angoli è uguale a due retti, sussiste la ipotesi d'Euclide, se è minore deve accettarsi l'ipotesi di Lobatschewsky, e se è maggiore quella di Riemann. In questi ultimi due casi, indicando con α la differenza tra la somma suddetta e due retti (la quale è positiva nel caso riemanniano) e con A l'area del triangolo, si può porre rispettivamente

$$\frac{\alpha}{A} = -\frac{4}{k^2},$$

o

$$\frac{\alpha}{A} = +\frac{4}{\pi k^2},$$

e si dimostra quindi che k da un valore indipendente dal particolare triangolo considerato.

[1] Di questo triangolo, i cui lati sono circa km. 69, 85, 197, parla GAUSS nel § 28 delle sue « Disquisitiones circa superficies curvas ».

La costante $\frac{\alpha}{A}$ prende il nome di *curvatura* dello spazio (per certe analogie colla teoria delle superficie); essa si riduce = O nell'ipotesi euclidea, che si ottiene come limite dalle precedenti per $k = \infty$.

Risulta pertanto che la soluzione *fisica* della questione delle parallele si può ottenere soltanto se, con accurate misure, si provi essere la somma degli angoli di un triangolo *sensibilmente* minore, oppure maggiore, di due retti. Ma, se tale somma si trovi sensibilmente uguale a due retti, resta il dubbio tra due ipotesi :

a) vale fisicamente la Geometria euclidea, per rispetto a misure precise quanto si vuole;

b) vale una delle due ipotesi non euclidee, ma la curvatura (negativa o positiva) dello spazio è molto piccola, e quindi il parametro k di Lobatschewsky è molto grande; cioè tanto grande che la somma degli angoli del nostro triangolo differisce da due retti per meno degli errori d'osservazione.

Ora appunto le più accurate misure dei triangoli sulla terra, danno, come quello osservato da Gauss, una verificazione sensibile della Geometria euclidea, a meno degli errori d'osservazione. Ne risulta che k supera un certo limite rispetto alle dimensioni terrestri.

Rivolgiamoci all'Astronomia. Qui s'incontrano triangoli di dimensioni enormi rispetto a quelli osservabili sulla terra; essendo molto più grande il denominatore della frazione

$$\frac{4}{\pi k^2},$$

si può sperare che la quantità α sia apprezzabile, pur superando k il limite dinanzi indicato. Tuttavia noi non possiamo più misurare i *tre* angoli di un triangolo celeste la cui somma si suppone differire di α da due retti, ma soltanto *due* di questi angoli. Così ad es. guardando una stella da due punti opposti dell'orbita terrestre, estremi dell'asse maggiore dell'eclittica, non si può misurare l'angolo x sotto cui si vede dalla stella il suddetto asse, ma soltanto i due angoli a, b, formati con questo dai raggi visuali che vanno alla stella.

Nell'ipotesi euclidea si ha

$$a + b + x = 2\,\mathrm{R},$$

e quindi l'angolo x viene dato dalla *parallasse* della stella, $2\mathrm{R} - (a + b)$, la quale si suole determinare riducendosi al caso in cui uno dei due angoli a, b sia retto. Quanto più lontana è la stella osservata, tanto più piccola diventa la sua parallasse, pur mantenendosi sempre positiva.

Invece nell'ipotesi di Lobatschewsky, le parallassi di tutte le stelle sarebbero superiori ad un certo limite (dipendente da k); all' opposto nell' ipotesi di Riemann le parallassi di stelle molto lontane dovrebbero essere negative.

Si noti: se le parallassi delle stelle osservate si trovassero tutte positive, superiori ad un certo limite, non si potrebbe affatto concludere che è contraddetta l'ipotesi euclidea delle parallele; la supposizione più naturale sarebbe invece di ammettere che le distanze delle stelle suddette restino tutte inferiori ad una certa misura. Tuttavia non verrebbe precluso l'adito a nuove ricerche più accurate sui triangoli terrestri, o sulla Meccanica del sistema planetario, dalle quali *potrebbe* scaturire la prova sperimentale della Geometria di Lobatschewsky.

Se invece la parallasse di qualche stella resultasse negativa, quando si tenga ferma l'ipotesi che la luce si propaga in linea retta, risulterebbe provata la validità della Geometria di Riemann.

Ma *l'osservazione ci dice che le parallassi delle stelle sono tutte positive o sensibilmente nulle*; ed ecco a quale risultato ci portano le stelle *più vicine*, cioè quelle che hanno una parallasse apprezzabile coi nostri istrumenti:

Dalla parallasse di 1″ Lobatschewsky trae che il suo parametro k supera 200 mila volte l'asse maggiore dell'orbita terrestre, il quale misura circa 300 milioni di Km. Ma vi sono delle stelle la cui parallasse è $\sim$ o″, 1, onde k supera 2 milioni di volte il suddetto asse; e la maggior parte delle stelle sono più lontane ancora, sicchè non danno una parallasse apprezzabile!

Pertanto lo spazio fisico si può considerare come euclideo, in un ordine di approssimazione che supera attualmente la precisione delle misure fornite dai nostri istrumenti più perfezionati.

Questa è la conclusione di Lobatschewsky: la quale si può enunciare dicendo:

Nello stato attuale delle nostre conoscenze, lo spazio fisico è da riguardarsi positivamente come euclideo.

Ma ciò non giustifica la pretesa che la cosa *non potesse* essere diversa.

Ed è ingiusto accusare i geometri non euclidei di avere sollevato un dubbio, che è rimosso soltanto per il presente e rimandato forse ad un lontano avvenire.

Giacchè se le parallassi delle stelle si fossero trovate tutte superiori ad un certo limite, non è a credere che ci si sarebbe fermati alla supposizione delle distanze inferiori ad una certa misura. Almeno l'ipotesi geometrica di Lobatschewsky poteva assumere in tal caso una forma più concreta, in rapporto ad un valore non *troppo* grande del parametro k. Diventava quindi possibile di controllarla in più modi, come sopra abbiamo accennato, o spingendo la precisione delle misure terrestri e moltiplicandone il numero, o studiando le con-

seguenze meccaniche di essa per riguardo al sistema planetario; e poteva ben darsi che certe piccole divergenze dalla legge di NEWTON trovassero così una correzione soddisfacente per la maggiore concordanza dei resultati.

A più forte ragione, se la parallasse di qualche stella fosse risultata negativa, si avrebbe avuto un solido fondamento per addottare l'ipotesi non euclidea, formulata più tardi da Riemann.

Nè vale dire che bastava modificare semplicemente l'ipotesi della propagazione rettilinea della luce. È pur facile accomodare le cose a priori, quando si è ormai sicuri di non essere smentiti dall'esperienza!

Giacchè in primo luogo, come abbiam visto, codesta ipotesi non potrebbe accettarsi per riguardo ad una distribuzione omogenea della materia nel mezzo ambiente, senza infirmare addirittura il fondamento comune delle Geometrie euclidea e non euclidea; e, quando si supponesse in concreto un'azione della materia sulla propagazione della luce negli spazii celesti, questa azione diverrebbe in più modi accessibile a nuove osservazioni indirette.

D'altronde la Geometria riemanniana potrebbe ancora ricevere un'altra verifica. Invero, secondo questa Geometria, la retta sarebbe una linea chiusa e finita (sia pure lunghissima), sicchè un astro remoto potrebbe essere visibile contemporaneamente da due osservatori posti, sulla terra, agli antipodi.

Infine ripetiamo ancora che, se pure la questione geometrica delle parallele non avrebbe potuto forse essere *risoluta* definitivamente da osservazioni ottiche nel campo dell'Astronomia stellare, queste avrebbero potuto ad ogni modo convalidare il dubbio dei geometri non euclidei, e, rendendolo più determinato, condurre quindi a cercare ad esso una conferma indiretta nel campo della Meccanica planetaria.

Affermando la validità della Geometria euclidea, in un ordine di approssimazione che si confonde positivamente coll'esattezza, noi affermiamo che *oggi*, all'infuori degli errori (*accidentali*) inerenti all'*applicazione* delle ipotesi simbolicamente espresse dalla Geometria, non vi è nelle ipotesi stesse alcun errore che si riveli sensibile all'esame delle loro conseguenze, dirette o indirette.

Il valore del dubbio sollevato da Lobatschewsky, sta nella confessione modesta, che non sappiamo se un errore di tal genere possa esser constatato in un remoto futuro. È soltanto questa *possibilità*, che viene contestata da coloro, i quali non ammettono il giudizio della critica moderna intorno alla validità *rigorosa* della nostra Geometria.

§ 11. La non-intuibilità delle Geometrie non-euclidee.

Che cosa rimane contro codesta possibilità?

Alla valutazione delle esperienze si oppone soltanto il vecchio argomento che ritiene *impossibile* ciò che è *inconcepibile*, o meglio *non intuibile*.

È vero che, nonostante la costruzione di un sistema adeguato di concetti, ci troviamo nella *impossibilità psicologica di rappresentarci i fenomeni reali in un quadro diverso dallo spazio secondo la sua ordinaria intuizione*. Ma questo *sentimento di necessità*, che accompagna la nostra visione immaginativa dello spazio, nulla può dire intorno alla struttura di questo, poichè la realtà fisica non ha alcun dovere da soddisfare rispetto alla rappresentazione che ce ne formiamo.

A chiarire la questione GAUSS ha addotto un argomento suggestivo, che è stato poi ripreso da HELMHOLTZ e da CLIFFORD, e va generalmente sotto il nome del primo di questi due filosofi.

Figuriamoci l'esistenza di *animaletti superficiali*, cioè schiacciati sopra una superficie, i quali sieno liberi di muoversi strisciando su questa. Dotiamo codesti esseri immaginarii di una intuizione spaziale, che valga a coordinare la sensibilità e a dirigerne i movimenti, nel campo a due dimensioni (superficie) costituente il *loro spazio*.

Due animaletti simili, uno dei quali si muova in un piano, l'altro sopra una superficie leggermente incurvata, potrebbero essere guidati ugualmente da una medesima intuizione geometrica, raffigurandosi il loro spazio come un piano.

I fatti che nel secondo caso, permetterebbero all'animale di acquistare conoscenza della *curvatura* della sua superficie, senza uscire da questa (poichè egli ignora, per ipotesi, la terza dimensione) sono del tutto analoghi a quelli che, a noi uomini, indicherebbero la falsità della teoria delle parallele, presa in un senso rigoroso; ma i fatti accennati sfuggirebbero al controllo dell'animale, ove questi fosse molto piccolo rispetto alla superficie che lo contiene, ed alla sua curvatura.

Eppure, se nella suddetta società di animaletti si trovassero dei filosofi, chi sa che taluno dalla intuizione formatasi del proprio ambiente come di una superficie piana, non argomentasse alla rigorosa e necessaria planarità della superficie stessa?!

§ 12. **Di altre Geometrie possibili.**

Nel suo scritto commemorativo « Gauss zum Gedächtniss », SARTORIUS dice: « Gauss considerava la Geometria come un edifizio logico, soltanto ove si conceda la teoria delle parallele come assioma; ma egli era giunto alla convinzione che quel teorema non si potesse dimostrare, quantunque si sappia per esperienza che esso è approssimativamente vero ».

Noi ignoriamo se la prima parte di tale apprezzamento corrisponda veramente alle più mature vedute di GAUSS; ed anzi siamo indotti a dubitarne, ricordando le osservazioni che egli fece col teodolite sulla verifica del postulato della retta.

Comunque, l'opinione da Sartorius attribuita a Gauss, nella prima parte del brano citato del suo discorso, non sarebbe accettabile.

Imperocchè a nessuno dei postulati geometrici, può essere riconosciuto il carattere di assioma logico; e ciascuna delle definizioni degli enti fondamentali della Geometria (viziosa, come riconoscemmo, nel suo aspetto logico) racchiude in sè stessa una supposizione reale.

Già abbiamo osservato che la proprietà fondamentale della linea retta, involge appunto l'ipotesi di una certa simmetria fenomenica, cioè un insieme di concordanze, senza le quali non sarebbe possibile di cogliere tanti ordini diversi di fatti, con una *unica* rappresentazione geometrica.

Di questa ipotesi possiamo dire che essa è, per ora, confermata da tutte le nostre esperienze, e nulla di più. Un apprezzamento quantitativo del grado di rigore ad essa spettante non sembra facile a darsi, sebbene non erriamo certo affermando che la sua esattezza relativa è enormemente grande.

Ma, quando pure si accettino come postuati le ipotesi costituenti il fondamento della *unità* della Geometria (metrica, ottica....), non si deve credere per questo che sia possibile *un solo* sistema geometrico generale, una Pangeometria, nella quale resti dubbia soltanto la questione delle parallele.

All'opposto le più recenti ricerche matematiche ci ammaestrano, che infiniti sistemi geometrici diversi restano ancora possibili, non soltanto logicamente, ma anche fisicamente.

Citiamo ad es. le forme spaziali di CLIFFORD-KLEIN, che stanno a rappresentare possibili costituzioni fisiche dello spazio, radicalmente diverse per un osservatore contenuto nei limiti ristretti della nostra esperienza, e per uno che codesti limiti possa notevolmente allargare.

§ 13. **La Geometria non-archimedea e l'arbitrarietà dei postulati.**

Negli esempii precedenti i *postulati*, che corrispondono alle diverse Geometrie, esprimono *ipotesi fisiche diverse*; la differenza, non constatata dalle esperienze attuali, rimane virtualmente constatabile rispetto ad ulteriori esperienze possibili. Ma si possono costruire, e si sono costruite infatti in questi ultimi anni, altre Geometrie logicamente diverse, che tuttavia non rispondono ad ipotetiche differenze fisiche. Il più bell'esempio è offerto dalla *Geometria non-archimedea*, costruita da G. VERONESE (1891) e più recentemente sviluppata da D. HILBERT e dalla sua scuola, in rapporto ad altri problemi matematici importanti.

Questa Geometria prende le mosse dalla negazione del così detto postulato d'ARCHIMEDE, riconosciuto indipendente dalle altre premesse geometriche ordinarie, ammettendo dunque « l'esistenza dei segmenti tali che il mul-

tiplo dell'uno secondo un intero arbitrariamente grande, sia sempre più piccolo dell'altro ».

Una siffatta ipotesi, che ha un senso matematico preciso come relazione di certi concetti, non ha invece *alcun senso fisico*, perchè non è accessibile in alcun modo all'esperienza: un segmento (*infinitesimo attuale*) minore di ogni summultiplo della nostra unità di riferimento, si troverebbe definito in modo trascendente rispetto a questa ed ai nostri sensi (p. es., all'organo tattile), sicchè l'ipotesi di un tale segmento non esprime direttamente alcun dato di sensazioni.

Ma di più questa ipotesi non ha significato fisico, neppure indiretto. Difatti Veronese ha mostrato come i teoremi della Geometria non-archimedea si lascino interpretare, in un *ordine infinito di approssimazione*, come identici a quelli della Geometria ordinaria, sicchè si conclude che « *la Geometria archimedea e la Geometria non-archimedea per mezzo di diversi sistemi di concetti, esprimono un medesimo sistema di ipotesi sui rapporti di posizione dei corpi* ».

Pertanto « *postulati, che rivestono una forma diversa, sono capaci di esprimere la stessa realtà fisica* ».

La Geometria non-archimedea porge una illustrazione interessante di codesta *relativa arbitrarietà dei postulati* rispetto al mondo reale, arbitrarietà che F. KLEIN ha messo in luce nel suo « Gutachten für Kasan », e che POINCARÈ prende, a parer nostro, in un senso troppo esteso, riguardando ogni postulato come una *convenzione*. Un elemento convenzionale appartiene di fatto ai postulati nel senso che « esistono sistemi di postulati esprimenti con rappresentazioni diverse le stesse ipotesi fisiche »; ma, accanto a questi sistemi di postulati equivalenti, vi sono anche (come vedemmo) sistemi non equivalenti, cui rispondono possibilità fisiche discernibili coll'esperienza. Una scelta arbitraria, in armonia colle esigenze *economiche* della rappresentazione spaziale, è permessa soltanto quando si tratta di sistemi di postulati equivalenti, o di sistemi non equivalenti che l'esperienza compiuta non sia riuscita ancora a discriminare; ma, nel primo caso, la scelta è puramente *convenzionale* e libera, nel secondo essa contiene un'ipotesi di fatto e anticipa quindi il resultato di esperienze possibili, dalle quali non è escluso che l'ipotesi medesima venga contraddetta.

B - L'acquisto psicologico dei concetti geometrici.

§ 14. Posizione del problema.

Abbiamo visto che la valutazione delle esperienze conduce ad ammettere varie Geometrie fisicamente possibili, e la critica matematica scopre perfino la possibilità di rappresentare un medesimo sistema di ipotesi sullo spazio reale, mediante sistemi diversi di concetti e di postulati. Ma nonostante l'arbitrarietà che rimane così alla costruzione geometrica, sta in fatto che l'intuizione, quale si trova in ogni mente formata, opera una scelta, costruendo la rappresentazione di uno spazio psicologicamente definito. Pertanto nasce il problema, interessante per lo psicologo, di spiegare codesta intuizione.

Ma in qual senso è da ricercare la *spiegazione*?

La risposta oscilla fra due vedute direttrici opposte, che si contendono il campo: il *nativismo* e l'*empirismo*. Dalla tesi kantiana che « i rapporti spaziali sieno rapporti che la mente scorge fra sensazioni possibili » deriva il nativismo, riattaccante l'intuizione di codesti rapporti alla struttura anatomo-fisio-psicologica dell'uomo. Dalla tesi che « i rapporti spaziali faccian parte del dato dei sensi (vista, tatto ecc.) » la filosofia empirica trae che la intuizione, o visione immaginativa delle relazioni spaziali, sia la semplice ripetizione di sensazioni anteriori e si riduca infine ad una somma di conoscenze o di fatti percepiti.

Ora le premesse del nativismo e dell'empirismo appariscono entrambe, fino ad un certo punto, vere, ma le conseguenze che se ne traggono unilaterali ed incompiute. Il nativismo ragiona come se potesse pensarsi una psiche formata anteriore all'esercizio dei sensi e indipendente dal mondo esterno; l'empirismo riduce invece tutta l'attività psichica ad una ricettività passiva.

I due indirizzi tendono a conciliarsi nella ricerca di *spiegare l'intuizione spaziale come uno sviluppo psicologico da sensazioni, in cui si tenga conto della struttura del soggetto.*

§ 15. Rapporti col problema biologico dell'orientazione spaziale.

Ma il problema si complica, sovrapponendosi alla ricerca psicologica una ricerca biologica, apparentemente pregiudiziale.

Alla tesi empirica che i rapporti di posizione fan parte del dato dei sensi, i nativisti contrappongono la veduta che « una conoscenza dei rapporti di posizione si può riguardare come implicita nell'uso stesso dei sensi (adat-

tamento dell' organo senziente all' oggetto) ». Quindi sorge il problema della *orientazione spaziale* cioè della *coordinazione dei movimenti alle sensazioni*, al quale si ritiene da molti che la questione psicologica possa senz'altro ricondursi.

Convertiti in tal guisa i termini del problema, la teoria della evoluzione viene ad allargare la ricerca dall'uomo all'animale, dall'animale individuo alla specie. E l'empirismo si sposa alla veduta epigenetica di LAMARK nella dottrina di SPENCER (1), che riguarda l'orientazione spaziale come un acquisto derivato dall'uso abituale dei sensi, tramandato poi per eredità, e fissato così attualmente nella specie formata.

All'opposto invece il nativismo trova la sua espressione biologica nelle teorie preformistiche e neopreformistiche, che ricercano sistematicamente la causa della variazione filogenetica nelle condizioni meccaniche, fisiche, biologiche, interne del vivente, lasciando al principio darwiniano della scelta naturale l'ufficio di dirimere il contrasto coll'ambiente esterno.

Ora non intendiamo per parte nostra di esaminare il problema dello spazio sotto questo aspetto (2). Basti rilevare che il sostituirsi della dottrina spenceriana al primitivo empirismo, segna già il riconoscimento che « nella orientazione spaziale dell'uomo o dell'animale individuo, vi è qualcosa di innato ».

Dalle cose dette innanzi vogliamo appunto ritenere la conclusione « che lo sviluppo della coordinazione dei movimenti alle sensazioni, cioè dell'orientazione spaziale, così negli animali come nell'uomo, è il prodotto di espe-

(1) Cfr. in particolare i suoi « Principes de Psychologie trad par Ribot et Espinas, 1874 (t. II, cap. XIV) ».

(2) A parte le vedute biologiche generali, crediamo assai dubbio il fatto che si riscontri un progresso di innata coordinazione dei movimenti alle sensazioni, quando si sale la scala zoologica. Mentre occorre un anno al bambino per camminare e tre mesi all'uomo adulto nato cieco cui sia ridonata la vista per coordinare l'uso ai movimenti, una meravigliosa prontezza di adattamento si rivela nei pulcini (vedansi le esperienze sui pulcini incappucciati di SPALDING nel libro di ROMANES sull'« Evoluzione mentale degli animali » — pag. 155 della trad. francese).

D'altronde la riflessione mostra che deve distinguersi l'evoluzione dell'organo coordinatore da quella della funzione. Questa tende a passare dal *conscio* all'*inconscio*, *voluta* dapprima diviene sempre più *riflessa* (Cfr. LEWES « Physiology of common life »); quello tende all'acquisto di una funzione sempre più complessa e cosciente, in rapporto al moltiplicarsi delle vie nervose e dei loro legami. Pertanto, aumentando nella filogenesi la varietà delle coordinazioni possibili, l'elemento acquisito empiricamente nell'orientazione spaziale dell'animale sembra avere una importanza sempre crescente, ed al contrario i modi primitivi di orientazione, essendo quasi determinati, appariscono più attinenti alla struttura organica nelle forme inferiori.

rienze eseguite sotto certe condizioni anatomo-fisiologiche » (1), senza investigare se e quanto tali condizioni debbano riattaccarsi a leggi meccaniche organiche.

Ma protestiamo subito contro la pretesa di alcuni filosofi neo-kantiani che codeste condizioni strutturali anatomo-fisiologiche dell'organismo umano, si rispecchino in certi caratteri a priori della intuizione spaziale, in guisa da fornire alla Geometria i suoi postulati non appena gli enti geometrici sieno costruiti dalle sensazioni. Così appunto W. WUNDT nei « Grundzüge der physiologischen Psycologie »(2) (Bd II, pag. 27) vuol fare derivare la *planarità* dello spazio intuitivo dalla disposizione delle ossa atta a favorire il movimento rettilineo, benchè sia all'opposto evidente che i membri ossei articolati costituiscono quasi dei pendoli composti, onde il movimento rettilineo non può ottenersi senza complicati compensi. E. G. HEYMANS (3) proponendosi in modo più determinato la spiegazione psicologica dei postulati geometrici, riguarda la linea retta come una « gleischförmige Innervationsreihe » (?), e pretende dedurre da ciò *a priori* la sua proprietà fondamentale di determinazione, mediante un simbolismo analitico, la cui applicazione ci sembra assolutamente arbitraria.

Ma a siffatti tentativi obiettiamo la pregiudiziale, che: il fatto della orientazione, comunque dipenda dalla struttura anatomica, viene avvertito dalla coscienza soltanto per mezzo di certe sensazioni (muscolari, tattili, visive ecc.), ed i dati bruti di queste non permettono di dirimere l'arbitrarietà che appartiene alla scelta dei postulati, ed in ispecie di conferire loro il carattere di esattezza che si riconosce nei rapporti spaziali intuitivamente rappresentati dal nostro pensiero.

Si tratta dunque qui di uno sviluppo psicologico, di una elaborazione e semplificazione ideale dei dati di senso, le cui condizioni subiettive sono da ricercare nella stessa funzione della psiche, non nell'anatomia del sistema muscolare, osseo ecc.

§ 16. **Programma delle successive ricerche.**

Ora la nostra analisi riuscirà a rappresentare codesto sviluppo come un *processo di associazione ed astrazione, e a ridurre le condizioni suddette alle leggi logiche operative*, in cui ravviseremo la spiegazione di certi caratteri

(1) Nel suo studio « Ueber die Raumwahrnehmungen des Taatsinnes » (Berlin, Reuter-Richard, 1898) V. HENRI trova appunto necessario di ammettere come originaria, nell'uomo, una disposizione anatomo-fisiologica per cui un eccitamento periferico provochi moti riflessi, conducenti l'organo tattile in prossimità del luogo eccitato.

(2) Leipzig, Engelmann, 1880.

(3) « Viertel jahrschrift für wissenschaftlische Philosophie », 1888, Bd XII, pag. 279

formali dei postulati, e del sentimento di evidenza o di necessità che vi si collega [1].

Più precisamente, dopo avere riconosciuto la *genesi dei concetti geometrici*, di cui i postulati esprimono i rapporti, vedremo come questi postulati si lascino decomporre in due parti: delle quali l'una costituisce semplicemente l'enunciato di un fatto in alcun modo evidente, ma che si presenta come una *condizione* per associare in un concetto unico una certa serie, illimitatamente proseguibile, di rappresentazioni diverse; l'altra si riduce ad un principio o ad un assioma, d'ordine logico, da riattaccarsi alla funzione logica del pensiero, già innanzi analizzata (cap. III).

Il concetto di una figura essendo preso come rappresentante un oggetto reale che corrisponde a più sensazioni associate, la esistenza o la possibilità d'un oggetto ipotetico rispondente ad un dato aggruppamento di sensazioni costituisce il *fatto geometrico* espresso dai postulati; invece la *forma*, sotto la quale questi si presentano all'intuizione del geometra, e l'evidenza che vi si collega, tiene alle *proposizioni logiche sovrappostesi al fatto medesimo*.

§ 17. **Fonti della critica.**

Ma non si può penetrare più profondamente il senso della spiegazione accennata, se non si spinga innanzi la critica del problema, che si propone di chiarire la genesi dei concetti geometrici.

I fatti che debbono richiamare la nostra attenzione appartengono da un lato alla Psicologia fisiologica, dall'altro alla Geometria.

Spetta invero alla Fisiologia d'indicarci in qual modo i rapporti d'estensione vengano percepiti colla vista, o col tatto, o colle sensazioni muscolari; ma per interpretare convenientemente questi resultati, bisogna sapere in qual modo i rapporti percepiti si leghino ai concetti geometrici fondamentali.

Il solo punto di vista fisiologico non riesce ad oltrepassare i problemi della distinzione delle sensazioni contemporanee, o della localizzazione di una sensazione, o della determinazione di una posizione nello spazio, problemi che, secondo osserva giustamente il nostro G. CESCA [2], non mirano ancora allo scopo psicologico di spiegare l'acquisto delle nozioni di spazio.

HELMHOLTZ ha bene avvertito la necessità, che qui si presenta, di dirigere ed interpretare l'esperienza fisiologica al lume di una critica dei postulati della Geometria; ma sembra che questo insegnamento sia stato dimen-

(1) Cfr. F. ENRIQUES: « Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria ». Rivista Filosofica. Pavia, 1901.

(2) « Le teorie nativistiche e genetiche della localizzazione spaziale ». Verona-Padova, 1883

ticato dopo di lui, e perciò appunto il lavoro sperimentale, proseguito da varie parti, non ha dato l'intero profitto che sembrava promettere.

Frattanto le ricerche sui principii della scienza geometrica, che all'epoca di Helmholtz cominciavano appena a trarre aiuto da istrumenti preparati nei campi superiori delle Matematiche, hanno acquistato, grazie a questi, uno sviluppo enorme. E i risultati ottenuti, da mezzo secolo in qua, sono di tal natura, che alcun fisiologo, lavorante alla questione psicologica dello spazio, può dispensarsi dall'apprenderli.

§ 18. **Osservazioni generali sul contenuto spaziale delle sensazioni.**

Un contenuto spaziale si ritrova, o può ritrovarsi, in ogni sensazione. Nei cani sembra che l'olfatto partecipi all'orientazione in modo eminente; e nell'uomo nato cieco le rappresentazioni spaziali si connetterebbero abitualmente all'udito, secondo testimonia lo HITSCHMANN [1]. Ma, di regola, nell'uomo, sono le sensazioni muscolari, tattili e visive, che, in connessione coi movimenti, concorrono a formare, associandosi, le rappresentazioni spaziali.

Oggetto di queste sono *punti, linee* e *superficie*. Le linee si possono *generare* col movimento di un punto e le superficie col movimento di una linea ;ma ad ogni modo, linee e superficie, in quanto si pensino realizzate, rispondono esse stesse a gruppi di sensazioni, diverse da quelle che sono fornite dalla variazione dell'ente generatore.

Di qui un duplice modo di presentarsi delle linee e delle superficie, su cui vogliamo subito fermare l'attenzione del lettore; cioè un *aspetto genetico* ed un *aspetto attuale* di esse.

Noi dobbiamo riguardare la rappresentazione completa che ci formiamo di una linea o di una superficie, come derivata per associazione dai due gruppi di sensazioni che corrispondono ai due modi di considerarla.

Ma, non soltanto la linea o la superficie, bensì già il *punto*, devesi riguardare non come *oggetto di una sensazione*, ma come *rispondente ad un gruppo di sensazioni associate*.

Affermare l'esistenza di un punto ha prima di tutto un significato relativo alla posizione dell'osservatore, ed implica l'attesa che a date sensazioni muscolari che definiscono, subiettivamente, certi movimenti si accompagnino o seguano date sensazioni tattili e visive. Soltanto secondo tale significato, in cui è posta una correlazione fra un senso espressivo ed un senso ricettivo, si può parlare della « sensazione di un punto ».

Questa veduta porta a sciogliere il problema della *localizzazione spaziale*, secondo la così detta *teoria associativa* di BAIN, TAINE e DELBOEUF.

[1] « Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgone », III, pag. 388.

Si aggiunga che la *distinzione delle sensazioni contemporanee* del tatto o della vista, riesce possibile mercè i cosidetti *segni locali* di LOTZE, cioè tenendo conto delle mutue differenze tra i punti della cute e della retina, specie in riguardo alle loro relazioni coi punti vicini; si ha così una soluzione abbastanza soddisfacente del problema, che intende a spiegare fisiologicamente « come si riesca a *determinare una posizione nello spazio* ».

§ 19. **Spazii fisiologici e spazio geometrico.**

Dappoichè la constatazione di un punto, come fatto bruto, dipende dalla posizione dell'osservatore, ed al variare di questa i rapporti fra i punti appariscono al soggetto come diversi, ne consegue che l'insieme dei punti, così intesi, costituisce uno *spazio fisiologico* relativo all'osservatore stesso, e differente dallo *spazio geometrico*. Questa distinzione fondamentale ricorre nei « Beiträge zur Analyse der Empfindungen » di E. MACH [1] e negli studii dello HERING da lui citato (op. cit., trad. it., pag. 152).

Anche altri autori hanno fermato la loro attenzione su questo, che lo spazio fisiologico, visivo o tattile o muscolare, non possiede i caratteri di omogeneità e di isotropia, che concediamo allo spazio geometrico; H. POINCARÈ, ad es., nel suo libro già citato. La cosa riesce d'altronde per noi così evidente, che ci pare inutile insistere su tali differenze.

Ma da tale constatazione sorge il problema di spiegare come dal dato bruto delle sensazioni di spazio ci s'innalzi alla rappresentazione geometrica.

Occorre qui aggiungere alle associazioni sensoriali un *processo d'astrazione*.

Dire che « *il concetto geometrico dello spazio è l'astratto dei varii spazii fisiologici possibili, per riguardo ad un osservatore mobile* », non può forse considerarsi ancora come una risposta esauriente alla domanda posta innanzi, finchè non si metta in luce, da una parte come lo spazio fisiologico stesso si avvicini, mercè associazioni ed astrazioni, ad una rappresentazione quasi-geometrica *relativa all'osservatore*, e d'altra parte come tutti gli elementi di speciale dissimetria dei varii spazii fisiologici possano essere eliminati nel loro confronto.

Ora, rimandando il primo compito ad un'analisi più accurata dei dati sensibili, osserviamo, relativamente al secondo, che una sistematica dissimetria viene pur creata rispetto ai movimenti dell'osservatore, nei riguardi della verticale, stante l'azione della gravità; ed è questa ancora un'osservazione del Mach.

Da ciò noi crediamo sia lecito argomentare, che l'ascensione del nostro intelletto dalla rappresentazione fisiologica alla geometrica, sia dovuta so-

[1] Jena, G. Fischer, 1886; trad. it., Bocca, 1903.

prattutto al confronto dei possibili *spazii visivi*, nei quali sieno già introdotti gli elementi associati provenienti da sensi diversi, attesochè codesta dissimetria meccanica non sussista per riguardo ai fenomeni ottici.

Una maggiore difficoltà, inerente ad un processo d'astrazione più intellettuale, dovrà dunque riscontrarsi nella genesi del concetto di spazio, presso i ciechi-nati; ed una difficoltà analoga dovrà pure rispecchiarsi nella genesi della *rappresentazione meccanica* dello spazio, come avremo agio di meglio osservare più tardi

Passiamo ora a discutere in particolare gli elementi concettuali delle rappresentazioni di spazio, fornite dai varii sensi. L'ordine della trattazione risponderà soprattutto al proposito di rendere più accessibili le nostre idee a chi sia meno fornito di una speciale preparazione matematica in questo campo, e di mostrare più lucidamente la necessità di ricorrere in tale argomento a siffatte considerazioni.

§ 20. **I dati spaziali della vista e la Geometria proiettiva.**

Dai numerosi resultati sulla fisiologia della vista (cui si riferiscono osservazioni ed esperienze di LOTZE, WEBER, VOLKMANN, FECHNER, HELMHOLTZ, PANUM, DONDERS, HERING, WUNDT, JAMES, MACH ecc.) basterà a noi trarre uno schema fondamentale del processo, senza entrare in discussioni minute intorno ai particolari di esso:

I fatti elementari della visione sono i seguenti:

1) La formazione dell'*immagine* sopra la retina, equivalente ad una proiezione centrale piana dell'oggetto.

2) I *movimenti dell'occhio*, effettuantisi normalmente attorno al cosidetto centro di DONDERS, ed obbedienti in modo approssimativo alla *legge* di LISTING, e a quella dell'*orientazione costante*, che ne dipende.

3) Il *fondersi* in via normale, delle *immagini* corrispondenti nella *visione binoculare*. Al qual riguardo è da avvertire che la fusione avviene normalmente, non solo quando le immagini cadono in punti (*identici*) che occupino un'analoga posizione nelle due retine, ma sempre, entro certi limiti, per le immagini corrispondenti ad un medesimo punto esterno, tostochè in forza di varii elementi concomitanti della sensazione si sia ottenuto l'*adattamento* conveniente dell'organo; il punto unico è veduto press'a poco nella direzione del raggio che biseca l'angolo dei due raggi visuali.

Dopo queste premesse ci troviamo in grado di discutere la questione fondamentale, sempre dibattuta « *se la vista ci dia la percezione immediata delle distanze fra due punti, cioè della grandezza dell'oggetto* ».

Il fatto semplice della visione binoculare dopo l'adattamento, si pre-

senta come una *proiezione bicentrale*, cioè come una duplice e simultanea proiezione dell'oggetto, da due centri sopra due piani.

Se domandiamo al matematico che cosa possa trarsi da una tale rappresentazione, egli non avrà che a ricorrere agli studii sulla *Fotogrammetria*, cui si riferiscono i recenti lavori di HAUCK e di FINSTERWALDER.

Due proiezioni dell'oggetto bastano, com'è evidente, a ricostruirlo, quando sia *dato* il *sistema di proiezione*, dati cioè i centri ed i quadri rispettivi. Allora anche la determinazione della distanza fra due punti, di cui vengono assegnate le immagini, può essere determinata in base a certi *elementi metrici* che appartengono al *sistema dato*, cioè, la distanza dei centri della visione dalle rispettive retine e l'inclinazione dei piani di queste per ogni adattamento dato.

In mancanza di tali elementi quattro immagini di un oggetto bastano a ricostruirlo a meno di una similitudine; cinque immagini (fra cui intercedano i dovuti legami) ne determinano di più la grandezza.

Come si dovranno interpretare questi resultati in ordine al nostro problema?

I dati visivi attinenti alle molteplici immagini che possiamo formarci di un oggetto col muover gli occhi, contengono gli elementi da cui si può dedurre matematicamente il confronto delle distanze, ma questo *non ha un senso proprio* per riguardo alle singole immagini; di più il giudizio delle distanze non può ritenersi neppure come dato immediatamente dalla visione binoculare, perchè gli elementi metrici del corrispondente sistema di proiezioni sono in parte dati anatomici, in parte dati variabili di accomodamento, e non possono riguardarsi come *noti* all'osservatore *prima* dell'esperienza visiva, e dei confronti e delle associazioni con altri sensi, che essa implica.

Così l'estensione della facoltà visiva alla percezione della forma e della grandezza degli oggetti deve essere acquisita da uno sviluppo empirico.

La necessità di tener conto dei dati di altre sensazioni associate alla vista, nello sviluppo suddetto, emerge anche dalla teoria che considera il senso della vista come differenziatosi, nell'evoluzione, dalla generale sensibilità tattile; imperocchè allora si deve ammettere una certa percezione immediata delle distanze, puramente subiettiva, secondo la quale si percepisca coll'occhio la *distanza apparente* fra due punti, in base alla lunghezza della sua prospettiva sulla retina. Questo elemento di giudizio innato, che è anche in relazione colle sensazioni muscolari inerenti ai movimenti dell'occhio, non può esser corretto che da una più larga esperienza, ove intervengano i movimenti dell'osservatore e le altre sensazioni connesse.

Le induzioni precedenti si basano sopra la considerazione anatomo-fisiologica dell'organo della vista. Esse riescono bene corroborate da uno studio della questione sotto l'aspetto psicologico.

Fra i molteplici fatti stabiliti da HELMHOLTZ (Physiologische Optik) e dalla sua scuola, citiamo in ispecie l'*errore* che in più casi si riscontra nella *comparazione delle distanze*. L'esperienza ha dimostrato che codesto giudizio comparativo (la cui possibilità pratica è limitata ad un campo assai ristretto) non presenta caratteri di uniformità e di esattezza, se non quando le distanze paragonate si trovino ugualmente lontane, ed inoltre l'estimazione riesce molto più imperfetta se esse hanno direzione differente. Si aggiunga l'errore nella valutazione del parallelismo di due rette, più sensibile di quello inerente al riconoscimento della convergenza ecc.

Helmholtz appunto ha spiegato questi fatti, ritenendo che il giudizio comparativo delle distanze non sia un dato immediato della visione, ma un acquisto dovuto all'abitudine di associare i dati di questa a quelli delle sensazioni tattili muscolari.

Da tutto ciò che precede siamo autorizzati ad accettare questa distinzione come fondata. Riconosciamo dunque come *dato immediato della vista*, il complesso di quelle proprietà geometriche dell'oggetto che si traducono in *proprietà delle proiezioni*, indipendenti dalla posizione particolare di quello, e dalla sua lontananza dagli occhi. Le lunghezze o distanze non figurano fra queste, e devono ritenersi come un acquisto empirico, conseguito mediatamente, per l'associazione colle sensazioni tattili-muscolari, nonchè colle stesse sensazioni visive che nascono da un cambiamento di posizione dell'osservatore.

Ma tali conclusioni non possono essere giustamente interpretate da chi non abbia acquistato certe nozioni fondamentali della Geometria moderna! E appunto a questa ignoranza si devono le deduzioni bizzarre, intorno a cui taluni filosofi si affaticano ancora.

In mancanza di un giudizio comparativo delle distanze fra punti e quindi della grandezza degli oggetti, si può credere che ogni nozione geometrica diventi estranea ai dati immediati della vista.

Questo errore può essere corretto soltanto da uno studio della Geometria proiettiva, quale essa si è sviluppata nel secolo scorso, da PONCELET a MÖBIUS, a STEINER, fino a conseguire il suo assetto definitivo ed autonomo nella trattazione di STAUDT [1].

Solo per questa via si acquisterà la nozione di una scienza che studia i *rapporti qualitativi* inerenti ai concetti elementari della *linea retta* e della *superficie piana*, i quali sono pienamente indipendenti dai *rapporti quantitativi* (o *metrici*) supposti dall'idea di distanza, benchè si esprimano ordinariamente per mezzo di questi.

[1] Cfr. l'appendice storica nelle « Lezioni di Geometria proiettiva » di F. ENRIQUES. Bologna. Zanichelli, 1898, 2ª ed 1904.

Appunto *la retta e il piano si distinguono*, per le loro proprietà ottiche, *nella visione*: la retta perchè le sue immagini retiniche sono rette; ed il piano per le sue relazioni colla retta, che si traducono in una *corrispondenza proiettiva* (1) fra le immagini.

Queste distinzioni si riferiscono, come è chiaro, alla visione binoculare. Tuttavia nella visione monoculare la retta e il piano hanno ancora un carattere distinto, quando passano pel centro dell'occhio; la retta è allora un *raggio visuale*, e la sua immagine si riduce ad un punto solo; il piano è veduto come una retta. Queste particolari rappresentazioni si associano alle generali, determinando, come vedremo alcune proprietà fondamentali della intuizione degli enti in discorso.

È una circostanza degna di nota che, rimpetto alla visione binoculare, una superficie curva si distingua da una piana, poichè a ciò si collega la sensazione del *rilievo*.

Il rilievo dunque è un carattere della rappresentazione visiva di una superficie, pertinente all'aspetto attuale della rappresentazione stessa: la corrispondenza retinica si discosta da una corrispondenza proiettiva, di guisa che le linee della superficie che hanno come immagini delle rette sopra una retina, hanno come immagini delle curve sull'altra retina.

Questo modo di distinzione, riattaccantesi ai dati immediati della visione binoculare, non ha nulla che fare con le sensazioni muscolari che accompagnano i movimenti degli occhi quando si passa dal guardare una superficie curva a guardare una superficie piana; nel primo caso si ha un criterio dell'incurvamento che dipende, in un certo senso, dalla sola considerazione della superficie in sè stessa, cioè dalle sue proprietà *interne*; nel secondo caso l'incurvamento è valutato per le relazioni (*esterne*) della superficie con ciò che è fuori di essa.

Noi abbiamo dunque, insieme alle possibili rappresentazioni genetiche, anche una rappresentazione attuale delle superficie, nel loro rilievo. Ci si presenta appunto sotto questo aspetto una superficie che *limiti* il nostro orizzonte visivo.

Non crediamo che si possa procedere più oltre, concedendo una *rappresentazione attuale di oggetti a tre dimensioni*.

Questi oggetti corrispondono nel nostro pensiero ad una successione di immagini superficiali, o al concetto astratto di una serie di successioni associate, ma nella visione adattata non si presentano mai come un dato proprio di sensazioni.

(1) Così si denomina la corrispondenza puntuale fra due superficie piane, in cui le rette si corrispondano.

Gli argomenti in contrario addotti dallo STUMPF [1] sembranci racchiudere un circolo vizioso. L'illustre psicologo vuol derivare la necessità di una rappresentazione delle tre dimensioni dal fatto che una superficie ha *due facce*, centri di curvatura *esterni* ad essa ecc.; ma queste considerazioni introducono già implicitamente come *data* la terza dimensione che vuolsi geneticamente *costruire*! Ora veramente la rappresentazione attuale propria di una superficie, come limite di un orizzonte visivo, contiene *una faccia sola*, sicchè il concetto delle due facce deriva dal sovrapporre immagini *successive* ecc.

Dire che i dati immediati della visione ci porgono le nozioni di retta e di piano, vale quanto affermare che *la vista ci fornisce gli elementi costruttivi della Geometria proiettiva.*

Pertanto lo spazio immediato della vita, come risulta per astrazione dai possibili spazii visivi, esclude le associazioni metriche, sarà uno *spazio proiettivo*. E poichè ogni retta può pensarsi otticamente prolungata, il suddetto spazio proiettivo si rappresenterà come *illimitato*. Nel fatto codesta illimitatezza viene concepita assai tardivamente; occorre invero un notevole sforzo di astrazione per giungervi in base al constatato allargarsi dell'orizzonte visivo quando procediamo verso di esso.

Ad ogni modo resta una particolarità della rappresentazione ottica dello spazio, che in essa non vengono mai comparati immediatamente due punti lontani in direzioni opposte. Da ciò consegue che nello spazio proiettivo della vista, non appaiono necessariamente coincidenti le due parallele condotte per un punto ai due raggi opposti di una medesima retta; la coincidenza non potrà almeno essere riconosciuta immediatamente, e fin tanto che non lo sia, lo spazio proiettivo della vista non avrà acquistata nella nostra mente tutta l'estensione che gli attribuiamo. Per parlare il linguaggio matematico, lo spazio proiettivo nelle sue rappresentazioni ottiche più immediate, si presenterà come un corpo interno ad una *superficie limite impropria*, di secondo grado. Vedremo più tardi come le associazioni tattili costringano ad allargare ulteriormente codesto spazio proiettivo fino alla rappresentazione euclidea, dove la superficie limite impropria si riduce ad un piano.

§ 21. **I dati spaziali delle sensazioni tattili muscolari e la Geometria metrica.**

La fisiologia delle sensazioni tattili-muscolari, presenta problemi involuti e complessi, anche perchè ad essa si riconducono le questioni inerenti ai varii sensi speciali, che, secondo il punto di vista dell'evoluzione, appariscono come un differenziamento della tattilità generale.

[1] « Ueber den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung », Leipzig, 1873 (passim ed in ispecie pag. 177 e seg.).

La distinzione comunemente accolta fra il senso di pressione e di temperatura, non esaurisce forse intieramente le varie *qualità* del senso tattile; e maggiori dubbii potrebbero sollevarsi intorno all'ufficio sensoriale delle varie espansioni nervose che si trovano nel tessuto epiteliale, quali i cosidetti *corpuscoli tattili* e i *corpuscoli* di VATER.

Più gravi difficoltà ancora s'incontrano nella spiegazione del senso muscolare, o senso del movimento dei muscoli, e nel determinare le sue relazioni col tatto. Basti accennare alla controversia circa l'esistenza di una sensazione sui generis, accompagnantesi alla corrente nervosa centrifuga che muove il muscolo; la quale, sotto il nome di *senso d'innervazione*, ha tanta parte nelle vedute del WUNDT, ed è parimente ammessa dallo HELMHOLTZ e dal MACH, ma viene invece negata dal JAMES come ipotesi non necessaria.

Fortunatamente sembra che codeste questioni non esigano una previa risposta per lo scopo proposto al nostro studio. Basterà a noi richiamare alcuni fatti fondamentali:

1) Le sensazioni tattili, e in ispecie quelle di pressione, vengono riferite al luogo della cute che è stato toccato (*segni locali* del LOTZE); ma nell'assegnare tale luogo si commette un errore variabile considerevolmente da posizione a posizione, sicchè due punti che, in una certa posizione della cute, distino fra loro meno di un certo intervallo (*soglia della sensazione*) non vengono più percepiti come distinti.

2) Una lunghezza costante viene percepita inegualmente dalle varie parti della cute, e cioè come maggiore là dove la finezza della sensazione è maggiore (esperienze col *compasso* di H. WEBER).

3) La grandezza di un oggetto mobile sulla cute viene percepita più perfettamente, che non la grandezza di un oggetto in riposo, sopra una singola parte della cute, e l'esercizio accresce notevolmente questa facoltà.

4) Al senso di pressione si contrappone il *senso di sforzo* e il *senso del movimento muscolare*. A quest'ultimo si collega l'ufficio non ancora ben definito dei *canali semicircolari* dell'orecchio nelle sensazioni d'equilibrio e d'orientazione (GOLTZ e MACH).

A questi fatti si riferiscono alcune osservazioni intorno al contenuto spaziale del senso tattile-muscolare.

Fermiamo la nostra attenzione sopra le esperienze di FECHNER e WEBER, relative alla soglia della sensazione tattile e all'ineguale percezione di lunghezze uguali.

La soglia della sensazione non appartiene solo al tatto, ma anche alla vista; essa ha un significato rilevantissimo in quanto ci mostra che lo *spazio fisiologico* (tattile o visivo) *non è continuo*.

Sorgerà quindi il problema di spiegare come il processo di associazione e di astrazione, per cui si trae la rappresentazione geometrica dello spazio dalle possibili rappresentazioni fisiologiche, conduca ad uno *spazio continuo*.

Il secondo punto che importa rilevare è il seguente: il giudizio comparativo delle distanze o lunghezze, e più generalmente delle grandezze degli oggetti, esige il riferimento ad un organo tattile scelto come sede di paragone costante. Questo organo tattile deve essere movibile rimanendo invariato, e adattabile agli oggetti, affinchè oggetti diversi possano essere così metricamente confrontati. Esso diviene un vero organo di *tatto speciale*, differenziato in vista delle discriminazioni metriche.

Tale organo per l'uomo è normalmente la mano, ma questa può essere surrogata, e lo è effettivamente in certi uffici, da un piede o da qualche altra parte del corpo.

Si deve poi ammettere che ben presto il tatto speciale permetta all'uomo di riconoscere l'invarianza nel movimento dei corpi solidi, e quindi che questi vengano utilizzati come più precisi istrumenti di confronto e di misura.

Una punta che scorra sulla cute, o la lama di un coltello appoggiatavi in riposo, ci porgono due immagini tattili della linea; genetica la prima, attuale la seconda. Se la lama suddetta striscia sulla pelle raschiandola leggermente si ha la rappresentazione genetica di una superficie; la rappresentazione attuale, distinta da quella e solo unitavi per associazione, corrisponde ad una lamina, di una certa lunghezza, appoggiata sulla pelle medesima.

La forma di una superficie, e in ispecie la sua planarità o il suo incurvamento, possono essere dati della rappresentazione attuale, riferita a parti della cute adattabili alla superficie suddetta; così p. es. alla mano distesa o incurvata corrispongono evidentemente sensazioni di contrazione muscolare diverse.

Ma la rappresentazione tattile delle tre dimensioni non si ottiene che geneticamente; ce la fornisce la successione delle impressioni tattili di una superficie mobile, aderente ad una parte della cute, che si muova con essa. Gli organi del tatto speciale hanno in tutto questo un ufficio più spiccato, se pure non necessario.

Fra tutte le linee e le superficie, si distinguono immediatamente i *cerchi* e le *sfere*, il cui riconoscimento è un dato del tatto speciale, collegandosi la generazione degli enti suddetti alla nozione comparativa delle distanze.

Quanto alla *retta* e al *piano*, la loro distinzione ci sembra, in gran parte almeno, un acquisto mediato. È vero che alcune ossa sono grossolanamente rettilinee, ma questo carattere particolare non può fermare l'attenzione fino a che non si sieno riscontrate altre proprietà notevoli della linea retta, come di essere *asse di rotazione* pei corpi solidi o *linea di lunghezza minima*. È anche possibile una definizione muscolare della retta in base alle sue proprietà

meccaniche; ma, tutto confrontato, sembra che gli *elementi costruttivi primordiali*, che entrano più spiccatamente a formare lo *spazio tattile-muscolare, non sieno le nozioni della retta e del piano, ma quella della distanza*, e quindi dei *cerchi* e delle *sfere*.

Le ultime conclusioni si lasciano esprimere dicendo che lo *spazio tattile-muscolare*, ed in ispecie quello *dato* dal suo *organo speciale, è lo spazio metrico*, le cui proprietà risultano dalle proprietà fondamentali della *distanza*.

Che questo spazio sia *illimitato*, e illimitata in esso la linea retta, risulta dalla possibilità di trasportare l'organo del tatto speciale o un oggetto qualsiasi, in guisa da dar luogo ad una successione di lunghezze uguali indefinitamente proseguibile.

Non risulta per altro necessariamente la *infinità* dello spazio stesso; le lunghezze consecutivamente poste per diritto una dopo l'altra (operazione che nella rappresentazione astratta, deve essere pensata senza limite) potrebbero bene ricoprirsi, dopo percorso un intervallo assai lungo. L'esperienza ci dice soltanto che ciò non si riscontra nel campo a noi accessibile. Lo spazio metrico di cui ci forniscono la rappresentazione le elementari esperienze tattili-muscolari, potrebbe dunque essere altrettanto bene uno spazio euclideo o di Lobatschewsky, come uno spazio riemanniano. E la scelta della rappresentazione euclidea, a cui pure si attengono i ciechi-nati, deve essere loro suggerita indirettamente da altre esperienze più complesse. Invece per l'uomo normale vedremo più tardi come essa sia un resultato dell'associazione tattile-visiva.

§ 22. **Parallelo fra lo sviluppo storico e lo sviluppo psicogenetico dei postulati geometrici.**

A questo punto giova ritornare rapidamente agli sviluppi sui principii della Geometria che (come accennammo nel § 9) furono proseguiti secondo varii indirizzi sotto l'impulso di RIEMANN; il confronto di queste ricerche coi resultati testè stabiliti ci permetterà di riconoscere che, con esse, i *geometri sono riusciti a scomporre la Geometria negli elementi costruttivi che corrispondono ai varii gruppi di sensazioni*.

In pari tempo riusciremo così ad una distinzione generale dei postulati geometrici di cui è domandata una spiegazione psicologica.

Le ricerche attinenti ai principii della Geometria [1] si possono distinguere secondo tre indirizzi fondamentali: l'*indirizzo elementare, l'indirizzo metrico* e *l'indirizzo proiettivo*.

Il primo indirizzo muove dal tentativo di una *sistemazione logica* dell'organismo euclideo, e fa capo alla fondazione della Geometria non-euclidea,

[1] Cfr. l'articolo di ENRIQUES citato a pag 117.

di cui già abbiamo discorso. In questo ultimo stadio l'interesse *fisico* della questione dello spazio prevale sui criterii logici di ordinamento. Comunque, l'indirizzo elementare suddetto è caratterizzato dalla mancanza di un'analisi tendente a *separare i concetti geometrici*; tutti i concetti fondamentali (di retta, piano, congruenza ecc.) sono considerati l'uno accanto all'altro, e si cerca soltanto di rendere *semplici* le proporzioni (*postulati*) che ne esprimono i primi rapporti, e di lumeggiarne le mutue dipendenze.

La separazione e la critica più profonda dei concetti fondamentali della Geometria, caratterizza invece lo stadio di ricerche che prende origine da B. Riemann, il più alto filosofo della Geometria. Qui, per la diretta influenza esercitata da HERBART sul suo discepolo, entra in campo, come interesse direttivo anche il *criterio psicologico*. D'altronde i rapporti dei concetti geometrici vengono quind'innanzi studiati col sussidio delle Matematiche superiori.

L'indirizzo iniziato da Riemann, cui si riattacca dappresso HELMHOLTZ, è l'*indirizzo metrico*, nel quale tutta la Geometria viene fondata sulla base della nozione di *distanza* o di *lunghezza di una linea*, entro una *varietà continua*. Questi studii si riattaccano, per una parte allo sviluppo della *Geometria differenziale*, fondata da GAUSS, e per l'altra alla *teoria dei gruppi di trasformazioni*, come è stato posto in luce più tardi da F. KLEIN, S. LIE, H. POINCARÈ.

D'altronde la fondazione della Geometria proiettiva, e l'assetto indipendente dalle nozioni metriche datole come si è detto da STAUDT, inducevano il KLEIN ad inaugurare un nuovo indirizzo (*proiettivo*) d'investigazione dei principii, dove si assumano come fondamentali le nozioni (*grafiche e ottiche*) della *retta* e del *piano*.

I legami fra i due ordini di concetti grafici e metrici occuparono quind'innanzi molti ricercatori, mentre altri si dettero ad investigare per più vie i rapporti intrinseci delle Geometrie metriche o della proiettiva, legando queste indagini ad alti ed interessanti problemi matematici.

Ma la Geometria proiettiva e la metrica, hanno un sostrato qualitativo comune, nell'insieme dei rapporti, inerenti ai concetti più generali di *linea* e di *superficie*, che caratterizzano una *varietà continua a più dimensioni*. Questi concetti, senza alcun intervento delle idee di retta, piano, congruenza ecc., danno luogo già ad un ramo della Geometria, detto *teoria dell'estensione* o del *continuo* o *Analysis situs*, che tuttavia non è stato sviluppato molto innanzi, con metodo puro.

Ne consegue l'opportunità di una critica volta a questi sommi principii di ogni Geometria, la quale può riattacarsi per una parte ad alcune vedute appena accennate dal Riemann, e per l'altra a taluni studii di DEDEKIND, WEIERSTRASS, CANTOR, ecc.; i problemi che così prendono origine furono

da noi nettamente posti ed in parte trattati geometricamente, in talune speciali ricerche (cfr. § 24).

Senza diffonderci ulteriormente in questa rapida rivista storica, basti ritenere che la critica dei principii della Geometria si è svolta parallelamente al differenziarsi della Geometria stessa secondo due rami, il *metrico* ed il *proiettivo*, aventi la loro radice comune nella generale *teoria del continuo* (o *Analysis situs*).

Noi possiamo ora riconoscere che questi due rami si riattaccano ai due gruppi di sensazioni tattili-muscolari e visive. E possiamo anche aggiungere che la generale sensibilità tattile-muscolare, la quale indipendentemente dallo specializzarsi del tatto, è anche il fondamento della impressionabilità della retina, porge già le rappresentazioni geometriche attinenti alla teoria del continuo, cioè le nozioni di linea, di superficie ecc.; è invece dovuta, come abbiam detto, ad un organo speciale di riferimento del tatto, la valutazione delle distanze e quindi la genesi di una esatta idea della congruenza o uguaglianza geometrica.

Queste conclusioni si lasciano riassumere schematicamente nel seguente enunciato:

I tre gruppi di rappresentazioni che si legano ai concetti posti a base dalla teoria del continuo (Analysis situs), *della Geometria metrica e della proiettiva, si possono riattaccare nella psicogenesi, a tre gruppi di sensazioni: rispettivamente alle generali sensazioni tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista.*

Questo resultato ci guida ad una spiegazione psicologica dei postulati della Geometria, e alla sua volta ne riceve conferma.

§ 23. **I postulati del continuo: la linea.**

Rivolgiamoci anzitutto ai postulati della teoria del continuo, riferentisi ai concetti di linea e di superficie.

Il concetto della linea, abbiam detto, deriva per mezzo di un'associazione e di un'astrazione dalle possibili rappresentazioni genetiche ed attuali di essa.

Nella rappresentazione genetica la linea è una serie puntuale, ordinata secondo l'ordine temporale dato nella psiche (cfr. cap. V); la serie ordinata nel verso opposto si associa alla prima, unendosi ambedue alla rappresentazione attuale che, sotto un certo aspetto, ne rappresenta l'astratto. Così nasce il primo postulato fondamentale: l'*invertibilità dell'ordine lineare*, che, secondo HERBART e BAIN, segna la differenza tra questo e l'ordine temporale.

Resta a render ragione della *continuità* della linea, la quale si esprime con due postulati:

1) Tra due punti di una linea vi è sempre qualche punto intermedio.

2) Postulato di DEDEKIND. Se una linea è divisa in due parti (classi di punti) per modo che:

a) ogni punto della linea appartenga all'una o all'altra;

b) ogni punto della prima parte preceda (in uno dei due ordini della linea) ogni punto dell'altra,

allora esiste un *punto di divisione*, cui non segue alcun punto della prima parte nè precede alcun punto della seconda.

Fermiamo la nostra attenzione sul primo postulato.

È chiaro anzitutto che esso non può esprimere una proprietà contingente di alcuna serie puntuale empiricamente data; anzi è stato già rilevato che nello spazio fisiologico questa proprietà della linea è contraddetta dalla esperienza.

Allorchè due punti A, B di una linea distano fra loro per meno del doppio della soglia di sensazione, riesce impossibile intercalare fra di essi un punto, sensibilmente distinto dai due dati. Tuttavia in molti modi sussidiarii constatiamo d'ordinario che tale impossibilità può esser tolta, ove ci si riferisca ad una parte più sensibile dell'organo tattile o alla vista, o con qualunque mezzo si affini il nostro potere di percezione.

Dappoichè varie immagini sensoriali si associano nella rappresentazione concettuale di una linea, dobbiamo spiegare la circostanza precedente ritenendo che un punto C, fra A e B, possa non essere distinto in una immagine sensoriale, per *difetto di percezione*. L'accoglienza di questa supposizione viene anche favorita dal fatto che la soglia delle sensazioni non ha una grandezza assolutamente fissa, che il movimento dell'oggetto sulla cute può diminuirla ecc.

L'estensione dell'esperienza c'induce dunque ad intravedere come possibile l'intercalazione di un punto fra due altri A, B, sopra un linea data, anche quando questa non riesca immediatamente palese al senso. Tuttavia questa estensione, nel fatto, ha sempre un limite che viene presto raggiunto. Se dunque il concetto della linea dovesse sorgere in noi dall'associare tutte le immagini sensoriali di una linea sola, fisicamente data, non saremmo mai condotti a postulare che l'intercalazione di un punto fra due dati possa proseguirsi indefinitamente.

Ma supponiamo associate in una sola classe di rappresentazioni tutte le possibili linee, e cerchiamo di determinare i caratteri del concetto astratto che ne deriva.

L'associazione fra due linee l, l' pone idealmente una corrispondenza biunivoca fra i punti di esse; e l'esperimento ci suggerisce che una tale corrispondenza può ottenersi facendo corrispondere a due punti A, B (distinti) dell'una, due altri punti qualunque A', B' dell'altra; ciò risulta, p. es., dalla sovrapposizione di fili elastici diversamente tesi, dal riferimento mediante

una proiezione di due linee rette ecc. Ora dunque, perchè due linee l, l' possano venir associate in tal guisa, occorre pensare che fra i due punti A e B di l, come fra A' e B' presi convenientemente lontani su l', si possa sempre intercalare un punto. Questa indefinita possibilità d'intercalazione spetta dunque come propr'età necessaria al concetto della linea, in quanto questo rappresenti il prodotto ideale di un'associazione e di un'astrazione di tutte le rappresentazioni genetiche delle linee, empiricamente assegnabili.

Ma la continuità della linea non ne resta ancora interamente affermata! D'onde scaturirà la seconda parte di essa contenuta nel postulato di DEDEKIND?

Che il processo occorrente all'uopo sia più laborioso, risulta provato dal non essere i greci pervenuti alla piena nozione della continuità della linea, se pure essi sieno stati costretti a sorpassare il primo stadio innanzi descritto, allorchè considerarono il problema delle intersezioni di rette e cerchi.

In questo problema occorre infatti ammettere che il segmento congiungente un punto interno ed un punto esterno ad un cerchio, interseca il cerchio. Ed è facile riconoscere che con ciò si aggiunge qualcosa al postulato 1), giacchè l'insieme dei punti di una retta che hanno ascisse *razionali* rispetto ad una certa unità di misura, costituirebbe un sistema di punti soddisfacenti al postulato 1), il quale tuttavia non sarebbe generalmente incontrato da un cerchio nelle ipotesi sopra accennate.

Il postulato delle intersezioni di rette si può riguardare come un caso particolare di quello di Dedekind, ove ci si riferisca alla divisione della retta nelle due parti di punti « interni » ed « esterni » al cerchio.

Ma i geometri greci non generalizzarono questo caso prendendo in esame tutte le divisioni analoghe che possono farsi in una linea; o tutt'al più fecero in tal senso solamente dei tentativi, a cui si collegano alcuni noti sofismi da essi tramandatici.

L'analisi della continuità è un acquisto della scienza moderna, ed il postulato di Dedekind l'esprime nella sua forma più piena e precisa.

Che « un punto divida una linea in due parti » è una conseguenza immediata dell'ordine lineare; l'analisi di Dedekind vi aggiunge il riconoscimento delle condizioni sotto cui « la divisione in parti di una linea è operata per mezzo di un punto ». Queste rispondono alla rappresentazione del punto come *termine* o *ente di separazione* della linea, riguardata nel suo aspetto attuale.

Il postulato 2) della continuità esprime dunque una condizione per l'associabilità di due diversi modi di rappresentarsi « il punto », come elemento

generatore della linea presa nella sua immagine genetica, e come termine o ente divisorio della linea stessa data invece nella sua immagine attuale [1].

La spiegazione genetica della continuità costituisce un problema così importante, che vale la pena di chiarirlo sotto un altro aspetto, prendendo in luogo del postulato di Dedekind, quello, logicamente equivalente, di WEIERSTRASS: entro un segmento, una serie di infiniti punti successivi possiede sempre *un* punto *limite*.

Sieno $A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$ i punti suddetti, definiti da una certa costruzione ripetibile, entro il segmento a, e procedenti, p. es., da sinistra verso destra. Rispetto ad una immagine concreta a_n di a, codesti punti, da uno di essi in poi, diverranno indiscernibili; p. es., la serie di punti $A_{n+1} A_{n+2} \ldots$ verrà percepita come un punto solo. Ma il valore dell' indice n che qui interviene può variare colla scelta della immagine (a_n) di a, e ritenersi, dipendentemente da questa, così grande come si vuole.

Ora l'ipotesi che nel segmento a (idealmente rappresentato) esista un punto A, limite di $A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$, ha questo significato, che: nell'associare le varie rappresentazioni a_n, facciano corrispondere ad *un punto* la serie dei segmenti $A_n A$, *termini* del gruppo $A_1 A_2 \ldots$, di cui nelle singole rappresentazioni suddette appariscono indiscernibili gli estremi.

Un tal modo di associazione è il più semplice processo costruttivo che valga a formare un concetto astratto della linea; ma non è l'unico possibile. Se si lascia cadere la condizione che le due rappresentazioni del « punto elemento generatore » e del « punto termine » di una linea si associno in guisa da corrispondere ad un unico ente astratto, si può costruire, con VERONESE, un continuo di specie superiore, non archimedeo, in cui esistono segmenti infinitesimi attuali, e dove non valgono più i postulati (equivalenti) di Dedekind o di Weierstrass, ma soltanto un postulato di continuità meno restrittivo, conosciuto sotto il nome di CANTOR.

Prescindendo dall'accennata costruzione astratta della Geometria non-archimedea, riassumiamo i risultati che concernono la nozione intuitiva ordinaria della linea:

I postulati della linea, riguardata nel suo aspetto interno, esprimono la possibilità di associare in un solo concetto astratto, secondo le leggi logiche del pensiero,

la rappresentazione genetica di una linea empiricamente data e la sua inversa, a quella dell'ordine temporale;

[1] Questa spiegazione della genesi psicologica del continuo, da noi esposta nella citata nota del 1901, s'incontra in una stretta parentela con quella proposta da H. POINCARÈ nel suo recente libro « Science et Hypothèse » più volte citato.

le varie rappresentazioni genetiche di una stessa linea o di linee diverse;

le rappresentazioni genetiche suddette alle rappresentazioni attuali, riunendo in particolare in una unica nozione astratta le due serie di immagini del punto come elemento generatore, e come termine della linea stessa.

Altre proprietà delle linee, riattaccantisi alla nozione della superficie scaturiscono dal confronto delle loro immagini attuali; ma esse concernono le loro relazioni *esterne*, mentre il concetto della linea, riguardata internamente, resta ormai fissato secondo il procedimento costruttivo descritto.

§ 24. **Postulati del continuo a due e a tre dimensioni.**

Il concetto generale della *superficie* come *varietà a due dimensioni*, deriva geneticamente, secondo B. RIEMANN [1], dal movimento di una linea.

Interpretata nel modo più largo, questa generazione conduce a prendere come dati sopra una superficie *due fasci di linee unisecantisi*, le *generatrici* e le *direttrici* o traiettorie descritte dai punti della linea mobile.

Se allora si suppone posta su queste linee una *determinazione metrica*, data cioè la nozione di *lunghezza lineare*, si riesce a rappresentare i punti della superficie con un *sistema di coordinate*, ossia a stabilire una corrispondenza biunivoca continua fra i punti della superficie e gli elementi (coppie di numeri) di una *varietà numerica* a due dimensioni.

Non volendo postulare fin da principio la determinazione metrica sopra le linee suddette, l'introduzione delle coordinate non riesce più possibile in base ai soli dati che figurano nella generazione di Riemann. Perciò questa viene considerata come una definizione insufficiente della varietà a due dimensioni, e S. LIE vi aggiunge esplicitamente l'ipotesi della rappresentabilità sopra una varietà numerica.

Allo scopo di dilucidare questo punto fondamentale per una pura teoria del continuo, noi abbiamo istituito una ricerca [2] di cui ecco il resultato: Si possono introdurre le coordinate sopra una superficie, tostochè sieno dati sopra di essa almeno *tre* fasci di linee a due a due unisecantisi; per il che basta, in sostanza ammettere *due* diverse *generazioni* della superficie stessa col movimento di una sua linea mobile.

Questo teorema risponde non soltanto alla questione matematica di *definire* il continuo a due dimensioni [3], ma anche alla questione psicologica di spiegare i postulati che vi si riferiscono secondo l'ordinaria intuizione. Infatti tali *postulati*, contenuti nella ipotesi della rappresentazione numerica,

(1) Habiliatationsschrift, Göttingen, 1854. (Göttinger Abhandlungen XIII, 1868).
(2) ENRIQUES — Circolo Matematico di Palermo, t. XII, 1898.
(3) Cfr. il nostro Art. citato a pag. 117.

esprimono condizioni per la possibilità di associare in un unico concetto astratto della superficie le varie rappresentazioni genetiche che vi si collegano.

Ai postulati che permettono di definire la superficie, riguardata internamente come varietà a due dimensioni di punti, si aggiungano quelli che caratterizzano le *relazioni esterne delle linee sopra una superficie.*

Appartengono a quest'ordine di relazioni le proprietà della *divisione in parti di* una superficie per mezzo di una *linea-termine*, quindi l'esistenza e la parità o disparità delle intersezioni di questa linea-termine con un'altra linea, che congiunga due punti di parti diverse ecc.

La rappresentazione di proprietà siffatte si ottiene in un modo progressivamente determinato coll'estendersi del concetto di « linea sopra una superficie », a mano a mano che certe immagini attuali della linea come termine si associano a quelle di una linea generatrice di una superficie data.

Se si parte, p. es., dalla rappresentazione del piano, generato dalle sue rette nei varii modi possibili, sorge l'immagine del semi-piano limitato da una retta, e si ha quindi il postulato di PASCH, ad esprimere la *proprietà di divisione* seguente :

Se tre punti A, B, C di un piano sono tali che il segmento BC non sega la retta *a* ed il segmento AB la sega, il segmento AC segherà la *a*; cioè se B, C sono dalla medesima parte di *a*, ed A, B da parte opposta, anche A, C saranno da parte opposta.

Ora la questione di enunciare i postulati atti a definire *in generale* il concetto di « linea sopra una superficie », s' imbatte nella difficoltà di fissare un limite ad un processo costruttivo dell'intuizione che, partendo da certe famiglie di linee, va gradatamente estendendosi a famiglie più generali. Perciò è dubbio se ed in qual senso l'analisi matematica del problema possa condurre ad un resultato sotto qualche aspetto compiuto [1].

Nondimeno le osservazioni precedenti ci hanno già indicato il modo di acquisto psicologico dei postulati in discorso; si tratta di associare l'immagine attuale di una linea, come termine divisorio di una superficie, a diverse immagini relative a generazioni possibili di questa.

Il passaggio dal continuo a due dimensioni a quello a tre, non dà luogo ad osservazioni veramente nuove; i postulati che caratterizzano le superficie generatrici valgono a definire questo continuo.

Ci limiteremo pertanto ad avvertire che il *postulato delle tre dimensioni*

[1] Citeremo i resultati in vario senso di CANTOR, PEANO, JORDAN, e talune osservazioni sulle *linee analitiche* ecc. per cui rimandiamo al nostro citato Articolo sui « Principii »

esprime una limitazione del processo genetico per cui dai punti si passa alle linee, e da queste alle superficie ecc.

Abbiamo già notato d'altronde che il continuo a tre dimensioni non è esso stesso oggetto di una rappresentazione attuale propria (cfr. in ispecie § 20).

Quanto alle *relazioni esterne delle superficie*, si ha anche qui una costruzione progressiva che sale da particolari famiglie di superficie a famiglie più generali.

§ 25. **Postulati della Geometria proiettiva.**

Abbiamo mostrato come i postulati che stanno a base della teoria del continuo, costituiscano condizioni per la possibilità di unire associativamente, nei concetti astratti della linea e della superficie, le varie rappresentazioni genetiche ed attuali che vi si collegano. La nostra critica ha in pari tempo posto in luce una certa indeterminatezza di quei concetti generali, dipendente dalla loro relatività, per cui si manifesta necessaria una costruzione progressiva, la quale ponga innanzi alcune linee e superficie particolari, e muova da queste ad estendere via via i concetti già definiti.

Questa necessità lascia scorgere, in un certo senso, l'ufficio di quella evoluzione, per cui le sensazioni particolari della vista e del tatto speciale, si differenziano dalla generale sensibilità tattile-muscolare, in ordine all'acquisto delle rappresentazioni di spazio.

Il procedimento della visione mette innanzi, fra tutte le linee, la retta; ed unisce nel concetto di essa due rappresentazioni ben distinte: distinte fra loro e dalle altre rappresentazioni lineari.

La retta si palesa infatti, come linea, non passante pel centro della visione, le cui proiezioni sono rette, e come linea (o raggio visuale) passante pel centro suddetto, che veduta da un occhio dà come immagine un punto.

Ora l'associazione di queste due rappresentazioni suppone la *esistenza di una linea, la quale sia veduta da ogni suo punto come un punto solo*, ed involge quindi il *postulato di determinazione della retta*: due punti appartengono ad una linea retta che è ugualmente determinata da altri due punti qualunque di essa.

Sieno infatti A, B, C tre punti di una retta, la quale venga guardata dal suo punto A, e sia T l'immagine retinica (o traccia sul piano della retina) della retta medesima. Il punto T è in questo caso l'immagine tanto di B come di C. Quindi la retta AB viene otticamente definita come il luogo dei punti le cui immagini cadono in T (immagine di B), e la retta AC parimente come il luogo dei punti la cui immagine cade in T (immagine di C).

Alla stessa definizione corrisponde, per il *principio d'identità* lo stesso ente, cioè:

$$AB = AC.$$

Ma per l'intermezzo della rappresentazione della retta non passante pel centro di vista, la retta AC si palesa come identica alla CA, e poichè qui si possono ripetere le precedenti considerazioni per riguardo ad un altro punto D:

$$CA = CD.$$

In definitiva ne scaturisce l'identità delle rette determinate dalle coppie di punti AB e CD.

Questo postulato mentre esprime un fatto, da cui dipende la possibilità di associare in un solo concetto astratto le rappresentazioni dei raggi visuali di una stessa retta, si traduce in una eguaglianza per riguardo al suddetto concetto, tostochè esso venga pensato come rispondente ad oggetti reali. Così appunto si spiega il sentimento di necessità che si accompagna al postulato in discorso.

Considerazioni analoghe sono applicabili al *postulato del piano* « il piano continue la linea retta che ne congiunge due punti arbitrarii ». Se invero si fa nascere il piano dalla *proiezione di una retta da un punto esterno*, il postulato anzidetto dice che « lo stesso piano è determinato ugualmente dalla proiezione, fatta da un suo punto qualsiasi, di una qualunque retta che ne congiunga due punti arbitrarii, non allineati col centro ».

Si deduce quindi che questo postulato esprime la condizione perchè possano associarsi, in un unico concetto astratto, le varie rappresentazioni della superficie piana, ed in particolare quelle che corrispondono al guardarla da un suo punto qualunque.

Pertanto *i postulati propri della Geometria proiettiva vengono riconosciuti come condizioni per l'associazione di certe rappresentazioni visive, da cui hanno origine i concetti astratti della retta e del piano.*

§ 26. **Postulati della Geometria metrica.**

I postulati della Geometria metrica concernono i *movimenti* e la *congruenza* o *eguaglianza geometrica* delle figure, pensate come *corpi solidi* astrattamente penetrabili o sovrapponibili.

Le prime proprietà a cui si ferma l'attenzione del critico, sono quelle relative alla *possibilità* e al *grado di libertà di movimento* dei solidi: tenuto fisso un punto di una figura un altro punto può descrivere una superficie; tenuti fissi due punti un altro generico può descrivere una linea; tenuti fissi tre punti generici il movimento non è più possibile.

È assai significativo il fatto che in alcune analisi incomplete di queste

nozioni (sia, p. es., in quella di HOÜEL), le suddette proprietà figurino soltanto fra i postulati, ritenendosi invece come *assiomi* le proprietà per cui la congruenza cade sotto il concetto logico di « eguaglianza ». Ed invero i suddetti postulati si presentano immediatamente come l'enunciato di *esperienze meccaniche*; al loro carattere di certezza non si riattacca un sentimento di necessità paragonabile a quello che accompagna le proprietà fondamentali della congruenza, ma soltanto l'*evidenza* che sorge da *esperienze qualitative*.

HELMHOLTZ sembra aver rilevato per primo che la congruenza geometrica non può ritenersi come un'eguaglianza, senza ammettere implicitamente altri fatti essenziali concernenti il movimento. Ed S. LIE, H. POINCARÈ, D. HILBERT, sotto diversi aspetti hanno reso la cosa più chiara, sottoponendo questi fatti ad una nuova critica.

La veduta fondamentale a cui tali ricerche sono ispirate sembra essere stata accennata per la prima volta nello Erlangen-Programm di F. KLEIN (1871).

Essa consiste in ciò:

Un movimento pone nello spazio, o in una regione di spazio, una *corrispondenza biunivoca puntuale* (*trasformazione*). Affinchè la relazione di due figure trasformabili con un movimento (*congruenza*) possa ritenersi come una eguaglianza occorre che:

eseguendo successivamente due movimenti si ottenga (come *prodotto*) una trasformazione che sia ancora un movimento (onde se A = B, B = C, A = C);

la trasformazione *inversa* di un movimento sia ancora un movimento (onde da A = B, B = A segua A = A).

Ciò si esprime brevemente dicendo che « i movimenti formano un *gruppo di trasformazioni* ». È chiaro che tale affermazione ha il carattere di un'affermazione di fatto, la quale involge certe proprietà d'*invarianza relativa* dei corpi solidi in movimento e dell'organo tattile, indipendenti dal modo come questo passa da una posizione ad un'altra.

Ora, dato che i postulati della congruenza, obiettivamente riguardati, hanno, al pari degli altri postulati della Geometria, un valore empirico, come si spiega il sentimento eminente di necessità psicologica che li accompagna?

Consideriamo per semplicità due figure congruenti, costituite da due coppie di punti fisici *equidistanti*, AB, CD; e poniamo, p. es., che la distanza dei suddetti punti di una coppia sia di *tre dita*.

Ponendo le tre dita fra A, B e fra C, D, si avranno due sensazioni successive che differiscono per la *posizione* in cui è stato collocato l'organo tattile, ma che hanno qualche cosa di comune, inerente all'invarianza dell'organo stesso nel passaggio dall'una all'altra posizione. Le rappresentazioni delle due coppie AB, CD non sono identiche, ma possono associarsi per

quello che hanno di comune in un'unica rappresentazione concettuale di *distanza*. Ora quando enunciamo la equidistanza

$$AB = CD$$

intendiamo esprimere ad un tempo una identità e una non identità; la possibilità di subordinare le due rappresentazioni ad una sola in ordine a *certe relazioni*, e la distinzione di esse rispetto ad *altre relazioni*.

Che cosa implica dunque la genesi del concetto di equidistanza, che sta a fondamento della congruenza geometrica?

Un'astrazione ed un'associazione, la quale riunisce sotto un certo aspetto due rappresentazioni; ed i *postulati della congruenza riferiti alla rappresentazione (concettuale) unificata prendono quindi la forma degli assiomi logici della eguaglianza.*

§ 27. **Associazione metrico-proiettiva: postulato delle parallele.**

Abbiamo tenuto conto fino ad ora delle condizioni associative che sottostanno alla genesi dei concetti geometrici, in ordine ad un solo gruppo di sensazioni tattili o visive. Questi hanno il comune sostrato nei concetti derivati dalla sensibilità generale e, tostochè si sieno associate le due immagini, tattile e visiva, del punto, danno origine a due Geometrie, una Geometria tattile ed una visiva, che si riferiscono al medesimo continuo a tre dimensioni, cioè al medesimo spazio.

Gli sviluppi matematici cui sopra abbiamo accennato, pertinenti in ispecie alla seconda metà del secolo appena compiuto, indicano fino a che punto possano svolgersi le due Geometrie suddette; onde si può affermare che col tatto (generale e speciale) costruiamo una Geometria *metrica*, e colla vista una *proiettiva*, riferentisi alla medesima varietà di punti (lo spazio).

Non pertanto queste due Geometrie si associano nella nostra mente, in un solo ordine di rapporti spaziali, e ciascuno dei sensi (in ispecie la vista) ci dà per associazione la percezione mediata dei suddetti rapporti.

Una tale associazione implica alla sua volta dei nuovi postulati. Giacchè invero si potrebbero costruire, in una varietà a tre dimensioni, due Geometrie astratte convenzionali, ponendo a base dell'una un sistema lineare ∞^3 di superficie denominate « piani », a base dell'altra un gruppo ∞^6 di trasformazioni denominate « movimenti », dotato di certe proprietà; e queste Geometrie formalmente identiche alla proiettiva e alla metrica ordinaria, non avrebbero tra loro, *a priori*, alcuna relazione.

La Geometria ordinaria invece unifica in un solo concetto della linea retta la immagine visiva e la immagine tattile di questa, venendo così a riconoscere una medesima *simmetria fisica* dei fenomeni ottici e meccanici.

Questa unificazione è così salda che occorre una critica molto profonda per separare i due ordini di concetti associati. A prima vista non si scorge differenza fra la proprietà ottica fondamentale della retta di essere determinata da due punti, e la sua proprietà meccanica di essere linea di minima distanza o asse di rotazione di un corpo solido.

L'intima ragione di ciò sta nel fatto che l'unione delle suddette proprietà è implicata dal giudizio « una linea congruente ad una retta è una retta ».

Se nella frase sopra scritta si pone la parola « eguale » in luogo di « congruente », ci vuole un grande sforzo di critica per accorgersi che il giudizio espresso non si riduce ad una tautologia.

Eppure, se supponiamo che « la luce non si propaghi secondo la linea metricamente più breve cioè secondo la retta definita nel senso meccanico » una traiettoria luminosa fatta ruotare intorno a due dei suoi punti darebbe una linea congruente alla prima, la quale non potrebbe più riguardarsi, come quella, una « retta » nel senso ottico della parola.

La congruenza delle linee rette esprime dunque il fatto fisico fondamentale inerente alla propagazione della luce nei mezzi omogenei. Questo fatto rende possibile l'associazione delle due Geometrie (tattile e visiva) in una sola Geometria metrico- proiettiva, per modo che nel più ampio organismo geometrico la congruenza rivesta ancora l'aspetto logico di un'eguaglianza.

Si avverta invero: con un procedimento di astrazione, analogo a quello analizzato nel campo dei movimenti, si arriva parimente alla nozione di una *eguaglianza proiettiva* o visiva, relazione che i geometri considerano sotto il nome di *proiettività* [1].

Ora la eguaglianza metrica (congruenza) si palesa alla vista come un caso particolare della proiettività. Essa viene così a denotare la identità delle relazioni spaziali di due figure riguardate nel loro aspetto *interno*. Quindi il postulato metrico-proiettivo della congruenza delle rette viene a nascondersi nella forma di un assioma della eguaglianza logica.

Qualcuno anzi ha creduto di poter giungere di qui ad una definizione della congruenza come identità delle proprietà interne di due figure. Ma, anche a prescindere dal suo carattere vago, questa definizione è insufficiente; invero senza il confronto con qualcosa di esterno non si distingue la congruenza dalla similitudine.

Poichè lo spazio metrico derivato dalle rappresentazioni tattili, e lo spazio proiettivo costruito dalla vista, si fondono nel concetto astratto di un unico

[1] Trasformazione che conserva le rette e i piani, e quindi tutte le *proprietà grafiche*.

spazio metrico-proiettivo, viene anzitutto a determinarsi la rappresentazione di questo, come quella di uno *spazio infinito*; la illimitatezza della linea retta nei riguardi ottici e meccanici, e il suo aspetto ottico di « linea aperta », escludono infatti la rappresentazione riemanniana.

Tuttavia resta ancora da spiegare come si pervenga al postulato d'Euclide, escludendo la rappresentazione iperbolica di Lobatschewsky.

È naturale di paragonare per questo le due rappresentazioni, tattile e visiva, che ci formiamo delle *rette parallele*.

Queste si presentano nell'aspetto ottico come rette di un piano non secantisi e, precisamente, come limiti di rette secantisi in un punto lontano. Nella rappresentazione tattile si presentano invece come *linee equidistanti*.

L'associazione porta che *due parallele vengano concepite come rette* (di un piano) *equidistanti*. E l'ipotesi dell'esistenza di due rette siffatte involge notoriamente il postulato d'Euclide delle parallele; in altri termini porta a riconoscere come unica la retta i cui raggi sono otticamente paralleli ad un'altra retta data, secondo le sue opposte direzione.

Così dunque, il *postulato delle parallele nasce dall'associazione tattile-visiva che ci porta al concetto metrico-proiettivo dello spazio*.

Questo concetto, comunque si possa discutere intorno al suo esatto valore reale, resta sempre nella sua formazione subiettiva euclideo. Ma la critica, che ne ha successivamente decomposto gli elementi costruttivi, è venuta appunto a sciogliere dapprima le associazioni più complesse e recenti, leganti insieme i dati di sensi diversi, per risalire quindi sempre più indietro, fino alle orgini del processo di formazione.

Le spiegazioni innanzi accennate intorno alla genesi del postulato d'Euclide possono ricevere conferma dallo studio della Geometria dei ciechi-nati?

E trovano esse, d'altra parte, un appoggio nella storia della Geometria non euclidea?

Alla prima domanda sembra si debba rispondere: se il postulato euclideo nasce da un'associazione tattile-visiva, i ciechi-nati non ne avranno alcuna nozione intuitiva.

Tuttavia questa supposizione è a priori inammissibile, giacchè appare chiaro che, mancando la vista, altre esperienze tattili-muscolari conducano nel loro complesso ad una rappresentazione euclidea dello spazio. E così avviene di fatto; noi stessi abbiamo potuto assicurarcene.

Tuttavia si può pensare che i ciechi-nati non debbano provare la repugnanza ordinaria verso l'ipotesi non euclidea. Ci sarebbe piaciuto assai di chiarire questo punto. Ma per verità giudichiamo insufficiente l'esperimento fatto nell'istituto di Bologna, presso un cieco-nato fornito di una certa coltura geome-

trica; e ci sembrerebbe ardito di prendere senz'altro come prova in favore della nostra tesi la testimonianza di questi, che, assentendo alla *possibilità* dei dubbii da noi espressi in senso non-euclideo, poteva evidentemente subire la suggestione delle nostre stesse domande.

Ciò che abbiamo ricavato dall'interrogatorio suddetto è la persuasione della estrema difficoltà di pervenire in tal modo a conclusioni accertate.

Una conferma della spiegazione genetica del postulato euclideo, viene invece fornita dalla storia. Il nostro amico G. VAILATI ci ha comunicato infatti che il SACCHERI attribuisce i pochi progressi fatti, avanti di lui, dalla critica non-euclidea, all'acquietamento di molti geometri di fronte alla definizione delle parallele come « rette equidistanti »; questo è per il Saccheri, un *errore di definizione complessa*. E appunto dalla denunzia di questo errore logico, l'ingegnoso ricercatore prende le mosse alla sua critica originale.

Ma che cos'è altro una definizione complessa, se non un modo implicito di postulare l'esistenza di un ente, il cui concetto deriva da più rappresentazioni concettuali associate?

A questo titolo si può dire più generalmente, che la pretesa necessità logica dei postulati geometrici, riposa sempre in un certo senso sopra una definizione complessa, dove per altro le rappresentazioni associate isolatamente prese, possono non entrare nella sfera concettuale.

§ 28. **Conclusione.**

Da un punto di vista sintetico le precedenti considerazioni sull'acquisto dei concetti geometrici, mettono in luce la varietà delle esperienze elementari ed inconsciamente ripetute che vengono rievocate nella visione immaginativa o intuizione dello spazio; ma più ancora esse ci mostrano il lungo processo di associazioni e di astrazioni per cui i concetti medesimi furono generati.

L'*evidenza della Geometria* sta a significare, da una parte la facilità di rievocare le antiche esperienze inconscie, ripetendole per così dire semplificate nella intuizione delle immagini; d'altra parte la possibilità di riscontrare nella *forma* dei postulati le operazioni di associazione ed astrazione, eseguite sugli elementi costruttivi dello spazio.

I fatti supposti dai postulati si presentano quindi come le condizioni di uno sviluppo psicologico, che si svolge secondo le leggi logiche e secondo il principio di economia, riuscendo appunto alla rappresentazione più unificata della realtà geometrica.

CAPITOLO V.

LA MECCANICA

Significato reale e sviluppo psicologico dei principii.

§ 1. La Meccanica come estensione della Geometria.

Prescindiamo dai dubbii che la critica getta sulla validità rigorosa dei postulati geometrici, rispetto a possibili esperienze future. La Geometria si presenta allora come una scienza puramente deduttiva, la scienza modello dei filosofi razionalisti!

Ma questo carattere di perfezione logica le compete soltanto come dottrina teorica, cioè come regola statistica (cap. IV, § 7). Se invece si considerano i resultati della Geometria nel loro contenuto reale, relativo a casi concreti, se cioè si prendono i rapporti geometrici come una parte delle relazioni fisiche (cap. IV, § 6), gli sviluppi deduttivi divengono incapaci a fornirci da un certo punto in poi, una previsione più precisa.

Il separare con un'astrazione la Geometria dalla Fisica è utile soltanto fino a che codesti casi si considerino come dati nel loro insieme, in condizioni fisiche *indifferenti*; ma dove all'opposto sia possibile di classificare le loro *differenze*, così da apprezzare la influenza *sistematica* che esse esercitano sulla previsione, si riuscirà a *proseguire la Geometria integrando i suoi concetti coll'associarvi nuovi dati sensibili*, per modo da renderne più determinata l'applicazione scientifica.

In questo senso una *prima estensione della Geometria è costituita dalla Meccanica*, la quale giunge a determinare una scelta fra i varii rapporti di posizione dei corpi riguardati geometricamente come possibili, tenendo conto di tempo, forze, masse ecc.

Ora questi nuovi elementi riescono non soltanto associati ai dati spaziali, ma anche *subordinati* alla rappresentazione geometrica nel processo costruttivo

dei concetti meccanici, appunto perchè questo *viene dopo, come acquisto psicologico*, alla Geometria.

Abbiamo già avvertito (cap. IV, § 6) che tale gerarchia dei concetti, rispecchiantesi nell'ordine di esposizione dommatica della Scienza, non ha valore di *subordinazione necessaria*. Non è vietato di alterare quest'ordine, di costruire cioè una Meccanica indipendente da qualche ipotesi geometrica, la quale si lascerà allora tradurre con una ipotesi meccanica equivalente. In tal modo la Meccanica può condurre ad una più estesa verifica o anche ad una correzione degli stessi principii geometrici.

Prendiamo p. es. il postulato V d'Euclide sulle parallele.

La Statica ordinaria si fonda su di esso; ma una critica approfondita permette di riconoscere quale sarebbe una Statica non-euclidea : due forze uguali perpendicolari ad un'asta rigida AB nei suoi estremi, darebbero una resultante perpendicolare ad AB nel suo punto medio O, precisamente come nel caso euclideo; ma, a differenza di questo caso, la resultante non sarebbe più uguale alla somma delle due componenti (FONCENEX, LAGRANGE, D'ALEMBERT, GENOCCHI, DE TILLY). Ecco dunque un' espressione statica del postulato geometrico delle parallele, una supposizione nuova che riconosciamo contenuta in esso, il cui verificarsi, nell'ordine del rigore sperimentale, costituisce una nuova prova della Geometria euclidea; se all'opposto questa verificazione avesse lasciato scorgere una differenza apprezzabile dal previsto, essa avrebbe potuto condurre a correggere i principii stessi di quella Geometria.

Ma gli sviluppi della Meccanica non hanno dato motivo a correzioni di codesto genere, sicchè può dirsi che la *Meccanica ha formato una più estesa verificazione della Geometria*. Invero se in taluni fenomeni riesce più difficile verificare i principii meccanici, non è apparso in alcun modo possibile di recare a codeste esperienze una correzione sistematica, modificando qualcuna delle già accettate cognizioni geometriche. La qual conclusione si accorda d'altronde coll'ordine di esattezza della Geometria, desunto dalle verifiche più dirette (cfr. cap. IV, § 10).

§ 2. **Programma.**

Volendo considerare la Meccanica come estensione della Geometria, si presenta assai naturale di trattare la materia in quest'ordine :

1) Anzitutto un'analisi del *tempo*, dappoichè questo concetto sorge come parallelo allo spazio, e si trova già formato prima di uno sviluppo scientifico della conoscenza.

L'aggiunta del tempo allo spazio, conduce senz'altro a quell'ordine di nozioni che costituiscono la *Cinematica*, ossia la Geometria estesa dei movimenti.

Ma, poichè una discussione approfondita sul *movimento* pone in rapporto

le nozioni cinematiche colle dinamiche, abbiamo rimandato questa discussione, attribuendola alla terza parte del nostro programma.

2) Una critica dei concetti e dei principii della *Statica*.

3) Una critica dei concetti e dei principii della *Dinamica*.

La separazione fra la Statica e la Dinamica è conforme alla tradizione storica, solo di recente mutata da alcuni, e s'impone secondo il nostro modo di considerare le forze.

Diremo ancora che allo scopo di riavvicinare le due trattazioni e di adottare nella Dinamica la semplificazione classica, ci siamo limitati in principio alla *Meccanica dei punti*, quantunque nella Statica potesse essere stato vantaggioso di considerare subito anche i *sistemi*. Le questioni relative a questi si troveranno dunque discusse nell'ultima parte del capitolo, così per la Statica come per la Dinamica.

§ 3. **Tempo: Successione e durata.**

Di due sensazioni o di due gruppi di sensazioni (fenomeni) noi avvertiamo che l'uno è *prima* e l'altro *poi*, oppure che essi sono *contemporanei*. L'*intuizione* che esprimiamo colle parole « prima e poi » porge un criterio ordinativo dei fenomeni in una serie (*successione temporale*).

Parlando di due fenomeni A, B e di altri due C e D, noi soliamo anche comparare l'*intervallo di tempo* passato fra A e B e quello fra C e D, dicendo che essi sono *uguali* o che l'uno è *maggiore* dell'altro. Questo giudizio ci conduce ad un apprezzamento quantitativo, cioè ad una *misura* del tempo o della *durata*.

È chiaro che la misura delle durate, ove sia stabilita, involge il criterio della successione temporale. Ma all'opposto *la nozione del prima e del poi non ci fornisce alcun criterio per confrontare due intervalli di tempo* che non abbiano un principio (o un termine) comune.

§ 4. **Tempo psicologico e tempo fisico.**

I giudizii di tempo, sia di successione, sia di durata, possono riferirsi a diverse *serie fenomeniche*; nello stesso modo come i giudizii relativi alle lunghezze possono istituirsi relativamente a diverse serie di corpi che vengano comparati come linee. Ogni serie fenomenica ci porge in questo senso una *scala temporale*, dove è dato almeno il prima ed il poi, e dove può esser fornito un criterio comparativo delle durate.

Il concetto astratto del tempo sorge per associazione ed astrazione da quello di tutte le possibili scale temporali.

Il tempo astratto, che pensiamo come *tempo fisico*, costituisce dunque la *supposizione* di una scala temporale nella quale hanno posto tutti i *fenomeni possibili*, a differenza del *tempo fisiologico* o *patologico* che è la scala di tutti i *fenomeni percepiti*.

La supposizione del tempo fisico implica in particolare:

1) la possibilità di associare le rappresentazioni temporali relative ad osservatori diversi;

2) la possibilità di associare le rappresentazioni temporali relative a luoghi diversi.

L'accordo delle rappresentazioni associate, e la conseguente verifica delle previsioni che ne scaturiscono, metterà in luce il *carattere reale del tempo*.

Si abbiano tre fenomeni A, B, C, e tre osservatori, uno dei quali osservi A e B, il secondo B e C, il terzo A e C. Se il primo osservatore trova che.

B succede ad A,

il secondo che

C succede a B,

si può prevedere e si verifica di fatto che per il terzo osservatore

C succede ad A.

Questo è il significato dell'accordo fra le rappresentazioni temporali di uomini diversi e si vede chiaro come vi sia implicita la possibilità di associare più scale temporali relative ad essi, in una unica scala relativa ad un osservatore ipotetico.

L'associazione delle rappresentazioni temporali relative a luoghi diversi, incontra una difficoltà nel fatto seguente: talune sensazioni che associamo pensandole come inerenti ad un fenomeno localizzato, le quali si presentano contemporanee ad un osservatore sul luogo del fenomeno, si presentano invece come successive ad un osservatore che si trovi in un luogo diverso. Così p. es. la luce e il suono relativi alla scarica di un fucile.

A rendere possibile l'associazione suaccennata interviene quindi una ipotesi, cioè che le fasi parziali di un fenomeno, successive nello spazio, sieno anche successive nel tempo (*tempo di propagazione*). E questa ipotesi è suffragata dall'esperienza relativa ai fenomeni che si riflettono sul luogo iniziale.

Pertanto, affinchè si possa stabilire un'associazione delle rappresentazioni temporali relative a luoghi diversi occorre:

o trovare un fenomeno che si propaghi istantaneamente;

o correggere l'apprezzamento empirico della contemporaneità dei fenomeni in luoghi diversi, mediante la misura del tempo di propagazione.

Prescindendo dalla misura, di cui parleremo tra poco, la propagazione quasi istantanea della luce (o della elettricità) serve in pratica a stabilire l'associazione voluta.

Ma il concetto della contemporaneità così posto non è rigoroso, ed anzi contiene un errore apprezzabile; infatti è noto che ROEMER in base a considerazioni astronomiche, e FOUCAULT con una diretta esperienza sulla terra, hanno misurato la velocità della luce (circa 300.000 km. al 1''), la quale si è trovato poi esprimere anche la velocità di propagazione delle onde elettriche.

A prescindere dunque dal criterio della misura, la successione temporale viene così resa indipendente dallo spazio soltanto nell'ordine d'approssimazione indicato dalla velocità della luce; in quest'ordine d'approssimazione, molto elevato rispetto alla pratica ordinaria, si possono agevolmente verificare sulla terra le previsioni concrete a cui conduce l'ipotesi di tale indipendenza.

§ 5. **Proprietà della successione temporale.**

Le proprietà dell'ordine che concepiamo come tempo fisico ci vengono imposte da condizioni associative delle varie scale temporali possibili.

Se prendessimo una sola scala costituita da una serie fenomenica periodica, questa ci darebbe una rappresentazione del tempo come di un *ordine chiuso*; ma la varietà delle nostre sensazioni nel loro complesso c'impone di considerare il tempo come un *ordine aperto*, il quale si estende poi indefinitamente nei due sensi colla supposizione di fenomeni possibili, successivi o precedenti a quelli delle serie date. Le serie fenomeniche periodiche si lasciano quindi associare per contemporaneità alle serie non periodiche, dando a ciascun fenomeno di esse una serie di posti ripetuti.

La *continuità dell'ordine temporale* è un'ipotesi relativa al concetto del tempo fisico, cui siamo indotti dal voler associare in una scala temporale astratta tutte le scale temporali possibili, e segnatamente quelle che tengono alla rappresentazione genetica delle diverse *serie lineari* di punti tattili o visivi (cfr. cap. IV). Il *tempo psicologico non è continuo*, perciocchè sono *momenti* di esso tutti i fenomeni percepiti l'uno dopo l'altro, i quali si presentano in una *serie numerosa*.

§ 6. **Durata.**

La nozione di un ordine secondo cui i fenomeni si succedono non esaurisce il contenuto della nostra conoscenza del tempo. Generalmente vi si aggiunge una determinazione metrica della durata che è anzitutto relativa alla serie fenomenica presa come scala temporale.

Un criterio della misura del tempo ci viene dato generalmente da ogni serie di fenomeni acustici o visivi, che si succedano ad intervalli distinti, ma assai frequenti da riempire tutto il campo psicologico dell'attenzione; l'apprezzamento quantitativo delle durate relativamente alle serie suddette è fornito dal *contare le pause*.

In una serie visiva continua, p. es., nella serie d'impressioni che corrisponde al tracciamento di una linea descritta da un punto mobile, si può stabilire una misura delle durate associando gli intervalli di tempo agli archi descritti dal punto mobile, i quali si misurano secondo le loro lunghezze.

I criterii anzidetti, riferentisi ad una o ad un'altra serie fenomenica presa come scala temporale, porgono una *misura* del tempo puramente *relativa*; le misurazioni fornite da serie acustiche o visive diverse, non sono comparabili fra loro. La misura istituita riferendosi convenzionalmente ad una serie particolare, serve soltanto a stabilire un più preciso modo di previsione del prima e del poi entro la serie scelta come scala di riferimento.

Mediante una misura convenzionale del tempo possiamo far corrispondere i successivi istanti ai valori di una variabile t esprimente l'intervallo di tempo trascorso a partire da una certa origine.

Se al posto di t si prende una *funzione crescente arbitraria*

$$\tau = f(t),$$

si ha un'altra misura convenzionale del tempo, la quale può avere un qualche significato concreto per riguardo ad un'altra scala temporale opportuna.

Di fronte a questo concetto della misura del tempo, puramente relativo alle diverse serie di fenomeni successivi, sta la veduta, che NEWTON ha accolto sotto l'influenza della filosofia medioevale, di un *tempo assoluto* indipendente dai fenomeni, nel quale è dato un *criterio* di confronto *vero* o *matematico delle durate*.

Questa veduta è giustamente combattuta dal MACH [1], con ragioni storiche, psicologiche e linguistiche.

A noi basta riscontrare in essa il medesimo modo d'intendere trascendentalmente il processo dell'astrazione, che già abbiamo più volte criticato.

Se dunque il tempo assoluto si deve riconoscere privo di senso, dovrà anche conchiudersi che la misura del tempo è puramente relativa?

A questa conclusione sembra fermarsi la maggior parte dei critici geometri; così ad es. P. WOLKMANN [2], e, per quanto vediamo, se pure meno

[1] « Die Mechanik in ihrer Entwickelung » 4.te Auflage, Leipzig, Brockhaus, 1901, (pag. 232-237).

[2] « Einführung in des Studium der theoretischen Physik ». Leipzig, Teubner, 1900 Cfr. anche l'articolo di POINCARÈ, su « La mesure du temps » che leggiamo nel volume testè comparso « La valeur de la Science ». Potrà sembrare strano che certe considerazioni sviluppate in questo libro per giustificare la conclusione nominalistica, si assomiglino a taluni degli argomenti che noi abbiamo adoperato collo scopo opposto. Ma il motivo fondamentale della differenza sta nella veduta trascendente del filosofo francese (cfr cap. IV), a cui si contrappone lo spirito della nostra critica.

esplicitamente, vi aderisce il Mach, ove confronta la misura del tempo a quella della temperatura.

A dirimere l'arbitrarietà della sostituzione

$$\tau = f(t),$$

che figura nella misura del tempo, s'invoca una scelta convenzionale della scala di riferimento, misurando gl'intervalli di tempo come proporzionali agli spazii percorsi da un mobile su cui non agiscano forze. Si prende così il *principio d'inerzia* non più come esprimente un rapporto tra forza, moto e tempo, ma come una *definizione del tempo*. La quale, si badi bene, non può ridursi in ogni modo ad una pura *convenzione* perchè implica un *fatto supposto* « se due mobili, non soggetti a forze, compiono contemporaneamente due spazii a, b, essi compieranno del pari contemporaneamente spazii proporzionali ad a e b ».

Questa è ad ogni modo una veduta troppo ristretta dei fatti che trovansi impliciti nell'ordinaria misura del tempo. E basti notare che codesta misura è anteriore alla scoperta del principio di inerzia!

Il senso comune accorda una *misura naturale del tempo* cui attribuisce in confuso un valore fisico proprio.

Quale significato può darsi a codesta opinione, quando sia eliminata dalla domanda ogni concetto trascendentale di un tempo indipendente dai fenomeni?

Paragoniamo la nozione della misura del tempo a quella delle temperature e a quella delle lunghezze.

Il tempo, come la temperatura, come l'arco di una linea o (in particolare) il segmento di una retta, può essere rappresentato da una variabile numerica t crescente in un dato verso.

Ogni funzione crescente $f(t)$, presa in luogo di t, conduce egualmente nei tre casi a rappresentare la *successione ordinata* dei tempi, delle temperature o delle lunghezze lineari; e si possono costruire un *orologio*, un *termometro*, e un *metro convenzionali*, rispondenti ad una scelta arbitraria della funzione $f(t)$.

Per l'orologio basta riferirsi ad un istrumento fondato sul movimento opportunamente vario di un lapis sopra un quadrante, il quale indichi *durate uguali* in rispondenza ad intervalli di tempo per cui la funzione $f(t)$ riceve *accrescimenti uguali*. Per il termometro basta che le dilatazioni della sostanza termometrica sieno apprezzate sopra una scala in cui si segnino come *accrescimenti di temperatura uguali* quelli corrispondenti ad *uguali accrescimenti* di $f(t)$; questi accrescimenti di temperatura convenzionalmente uguali saranno d'altronde in diverso rapporto cogli aumenti di volume della sostanza termo-

metrica, secondo la natura della sostanza prescelta. Quanto al metro, se ne potrà foggiare uno convenzionale, secondo la condizione fissata, servendoci di un *filo elastico graduato*, diversamente teso nelle sue varie parti, ove per altro si dispongano le cose in guisa che un tratto qualunque del filo venga sempre ad essere teso nel medesimo modo allorchè con un movimento riprenda la medesima posizione.

Ora i varii termometri convenzionali rappresentano ugualmente bene le nostre sensazioni di aumento di temperatura; infatti la sensazione che proviamo nel passaggio da 0° a 1° e quella relativa al passaggio da 20° a 21°, rispetto ad un ordinario termometro a mercurio, non hanno nulla di comparabile, onde, se un altro termometro c'indichi il secondo aumento come doppio del primo, non abbiamo nella sensazione alcun criterio per preferire l'una all'altra fra le due indicazioni [1].

Ma lo stesso non possiamo dire dei varii metri convenzionali possibili. Infatti uno solo fra questi metri, quello costituito da un *filo solido inestendibile*, si accorda colle *sensazioni della lunghezza lineare* fornite dall'organo tattile. Noi riguardiamo perciò quel metro come *misuratore naturale delle lunghezze*, e riconosciamo che la possibilità di questo modo di misura suppone un *fatto generale*, cioè la *proprietà d'invarianza dei corpi solidi* rispetto all'organo tattile, e degli uni rispetto agli altri, *nel movimento*.

Ora, che cosa diremo dell'orologio? Esiste un orologio le cui indicazioni rispondano ad una sensazione di durata relativa a certe serie fenomeniche nettamente distinte che abbiamo in vista allorchè parliamo di una *misura naturale del tempo*? E vi è qualche fatto generale che si esprima col reciproco accordo delle indicazioni fornite dalle scale temporali suddette?

Insomma, oltre alla sensazione inerente al contare le pause in una qualsiasi serie di fenomeni distinti, esiste una sensazione della durata relativa a serie fenomeniche *isocrone*, che possa confrontarsi alla sensazione tattile della lunghezza, o invece non si trova nella durata alcun significato sensibile proprio, come accade per la quantità dell'aumento di temperatura?

Rispondiamo alle domande precedenti:

Noi abbiamo la *sensazione del ritmo* di certe serie acustiche che denominiamo *isocrone*; le varie serie di suoni che sentiamo come isocrone ci porgono misure del tempo confrontabili l'una coll'altra, portano cioè, sebbene in limiti di sensazione ristretti, ad un medesimo apprezzamento delle *durate uguali*, e quindi ad una medesima *misura naturale del tempo*.

Che l'udito ci porga un apprezzamento assai preciso dell'isocronismo, e

[1] Circa il significato della temperatura assoluta cfr cap. VI.

che vi sia accordo nella sensazione del ritmo musicale, è un fatto incontestabile, almeno per rispetto agli orecchi esercitati alla musica.

Si può dubitare tuttavia che si tratti di una sensazione originaria dell'udito, piuttostochè del resultato di un'associazione con certi movimenti muscolari, i quali in una serie di successive ripetizioni tendono ad effettuarsi regolarmente.

Tutti sanno che i musicisti ricorrono ad un processo di questo genere allorchè si tratta di *battere il tempo*. E l'isocronismo dei movimenti lentamente ripetuti della mano o del piede, è forse in connessione col ritmo di certe funzioni organiche e segnatamente del polso.

Si potrebbe dire pertanto che l'orecchio ci porge la nozione dell'isocronismo, e quindi delle durate, per associazione col senso muscolare, come analogamente l'occhio ci fornisce la nozione delle lunghezze per associazione coi dati del tatto.

Ma qualunque veduta si abbia intorno a ciò, resta sempre che « mediante una serie di movimenti ripetuti, accompagnati da suoni, possiamo stabilire una misura del tempo, nella quale gli uomini si accordano in limiti ristretti ma abbastanza precisamente, come dinanzi ad un oggetto di sensazione propria della durata ».

E poichè alle sensazioni di durata si riferiscono di continuo previsioni avverate, possiamo parlare della *durata* come di *qualcosa di reale*.

Ogni orologio le cui indicazioni rispondano alla sensazione anzidetta, dovrà dunque riguardarsi come un *misuratore del tempo fisico*, a differenza di un altro orologio convenzionale qualsiasi. E per mezzo di un tale orologio noi avremo quindi il mezzo di *estendere la misura naturale del tempo* al di là dei limiti ristretti a cui ci costringe il ricorso ad una serie musicale isocrona.

L'accordo fra le sensazioni di durata già ci assicurano un *certo* accordo fra gli orologi graduati naturalmente; ma un accordo *più preciso*, ove si riscontri, costituirà un fatto generale che ci proponiamo di riconoscere.

§ 7. **Il postulato della misura del tempo.**

Nell'estendere l'apprezzamento comparativo delle durate, al di là dei limiti della sensazione primitiva, seguiamo la medesima via che si suole percorrere in questioni analoghe.

Partiamo dalla supposizione che l'*uguaglianza delle durate* esprima un *carattere reale* dei fenomeni, *entro limiti più precisi* di quelli fissati dalla sensazione immediata. Allora siamo indotti a supporre che questa uguaglianza debba riscontrarsi per tutti quei fenomeni svolgentisi in determinate *condizioni costanti*, che riattacchiamo a *cause uguali*.

Sebbene una supposizione siffatta sia priva di un senso rigoroso, essa ci conduce direttamente a ricercare

1) se fenomeni producentisi in certe *condizioni simili*, praticamente costanti, che riguardiamo come effetti di *cause sensibilmente uguali*, abbiano durate uguali rispetto alla sensazione d'isocronismo;

2) se fenomeni siffatti, confrontati al di là dei limiti della sensazione diretta, conducano ad un medesimo apprezzamento delle durate uguali;

3) se l'eventuale disaccordo che si riscontri nella verifica della supposizione 2) non possa rendersi sempre più piccolo, eliminando progressivamente per quanto sta in noi talune diseguaglianze notevoli dei fenomeni ritenuti uguali.

Le supposizioni che rispondono alle domande 1) 2) 3) costituiscono il *postulato fondamentale della misura del tempo*, a cui facciamo appello direttamente o indirettamente nella costruzione e nella correzione degli orologi. *L'accordo degli orologi* così costruiti, entro i limiti in cui è possibile ottenerlo, costituisce la verifica del postulato stesso; la verità del postulato può tenersi ipoteticamente come *rigorosa*, fino a che non si riscontrino *errori sistematici*, ma soltanto *errori accidentali* che tendano ad eliminarsi nella media.

Cerchiamo di apprezzare l'estensione del postulato introdotto.

A tale scopo riflettiamo che:

1) Sulla terra si ottiene già un primo accordo sensibile dei varii orologi a sabbia e ad acqua e più generalmente fondati sulla costanza del peso. E un accordo più preciso può essere raggiunto una volta riconosciuto con mezzi anzidetti l'isocronismo delle piccole oscillazioni del pendolo, tostochè questo principio venga assunto come supposizione fondamentale nella costruzione degli orologi a pendolo.

2) Le osservazioni astronomiche c'inducono a ritenere uguali certi intervalli di tempo in cui si compiono fenomeni di movimento quasi periodici; p. es., ad ammettere la costanza del giorno siderale, del mese, dell'anno ecc.

Ed i varii criterii di misura così ottenuti si accordano assai precisamente colla misura degli orologi terrestri e più precisamente fra loro; inoltre l'accordo ottenuto può sempre rendersi più preciso mercè opportune correzioni e confronti, secondo il postulato fondamentale.

È veramente notevole che il grado di esattezza delle verifiche accennate giunga ad un limite praticamente rigoroso, e non è affatto strano che piccole differenze si manifestino nelle misure fornite dagli orologi, quando si rifletta alle tante cause di variazione delle circostanze ritenute uguali: la variabile temperatura che influisce sulla caduta dell'acqua o della sabbia attraverso un piccolo foro o sulla lunghezza del pendolo, e di cui non si riesce bene a compensare gli effetti; le cause stesse che possono modificare la gravità in un dato luogo della terra; le condizioni del sistema planetario, lentamente mutabili all'infuori delle variazioni periodiche; la variazione dello stesso universo astronomico che riteniamo come condizione costante!

Chiariti i fatti supposti nella misura del tempo, crediamo ancora opportuno avvertire che non si sarebbe in alcun modo autorizzati a ritenerli come *verità necessarie*. Due clessidre si sono vuotate una volta in modo contemporaneo, come escludere *a priori* che in un'esperienza successiva una di esse non si vuoterà prima dell'altra?

Contro la possibilità dell'ipotesi si addurrebbe invano il sentimento di *evidenza* che accompagna il postulato della misura del tempo. Infatti tale evidenza tiene soltanto a ciò che *il postulato esprime la condizione necessaria perchè la durata possa essere associata ad altri dati sensibili nel concetto di un fenomeno*; ma il verificarsi di codesta condizione costituisce propriamente il fatto, sperimentalmente riconosciuto, di cui si tratta: *la realtà obiettiva della durata*.

§ 8. **Sulla indipendenza del tempo dal luogo.**

Ammettiamo il postulato analizzato nel precedente paragrafo; la misura del tempo riesce stabilita *in un dato luogo*, per modo che la variabile « tempo » resta fissata in ogni istante a meno di una sostituzione lineare intera:

$$\tau = at + b.$$

Le costanti a, b dipendono da due scelte convenzionali arbitrarie: cioè dalla scelta dell'unità di misura, e dalla scelta dell'istante iniziale.

Per paragonare due durate in *luoghi diversi* A, B si presentano due criterii:

1) il *trasporto* di un dato fenomeno nello spazio conformemente al postulato della misura del tempo; p. es., il trasporto della clessidra o dell'orologio a pendolo ecc., fatta attenzione alle circostanze correttrici come, p. es., la variazione della gravità;

2) la *segnalazione* in B del principio e del termine di un fenomeno svolgentesi in A, per mezzo della luce o dell'elettricità ecc. In questo giudizio il tempo di propagazione scompare, attesochè esso possa ritenersi costante conformemente al postulato del precedente paragrafo, purchè non vari la distanza fra A e B.

Che i due criterii di confronto si accordino nel medesimo giudizio sulle durate uguali in luoghi diversi, si può ritenere implicito nello stesso postulato anzidetto, congiunto alla supposizione geometrica fondamentale delle simmetrie fenomeniche (omogeneità dello spazio), ma soltanto sotto la condizione che A e B trovinsi *in quiete relativa*, e dopochè si sia verificato che l'intensità del fenomeno non influisce sulla velocità di propagazione.

Immaginiamo una doppia segnalazione reciproca da A in B e da B in A, p. es., mediante la luce; i due tempi di propagazione debbono, a condizioni

pari, ritenersi uguali per ragione di simmetria. Possediamo quindi il mezzo di misurare direttamente il tempo di propagazione impiegato da A in B, tutte le volte che la segnalazione possa riflettersi su A; basta dimezzare l'intervallo trascorso dalla partenza al ritorno dell'onda luminosa o elettrica ecc.

Su questo principio è fondata la misura della velocità della luce fornita dalle esperienze di FOUCAULT.

Ora è chiaro che perveniamo quindi a fissare, in modo teoricamente preciso quanto si vuole, il giudizio di contemporaneità in luoghi diversi, sempre sotto la condizione di quiete relativa.

Ben inteso l'accordo sperimentale dei diversi giudizii che così possono ottenersi costituisce un fatto; ma la supposizione di questo è da ritenersi contenuta nel postulato della misura del tempo.

Dunque in virtù di quel postulato fondamentale si può:

1) giudicare della uguaglianza di durate in luoghi diversi A, B;

2) giudicare in essi della contemporaneità di due fenomeni; purchè A e B sieno in quiete relativa.

Tanto basta a *trasportare la medesima rappresentazione numerica del tempo stabilita per un luogo A in ogni altro luogo B che trovisi in quiete relativa rispetto ad A.*

In ciò consiste *l'indipendenza del tempo dal luogo.* Ma si tratta di una *indipendenza relativa.*

Se B varii rispetto ad A, cresca cioè o diminuisca la distanza AB, il criterio della segnalazione (ottica, elettrica ecc.), non permette più di fissare la simultaneità degli istanti iniziali; ove si adotti semplicemente codesto criterio, come se A e B fossero fissi, si troverà nella rappresentazione del tempo una *costante additiva locale,* che potrà essere avvertita soltanto ove sia possibile di ricorrere all'altro criterio del trasporto, cioè coll'invio di un orologio da A in B.

Ma vi è di più. Nelle circostanze predette, il criterio della segnalazione non varrà neppure a stabilire l'uguaglianza di due durate relative a fenomeni svolgentisi rispettivamente in A e B; il tempo sarà ancora affetto da una *costante locale moltiplicativa.*

Insomma, *trattandosi di luoghi in moto relativo, e data l'impossibilità del trasporto di un orologio da un luogo all'altro, il tempo resta determinato a meno di una sostituzione lineare.*

$$\tau = at + b,$$

dove a *e* b *sono costanti locali dipendenti dalle velocità relative.*

Questa idea del *tempo locale* ha un ufficio importante nella teoria elettromagnetica di LORENTZ e nei recentissimi sviluppi di POINCARÈ cui accenneremo nel cap. VI.

§ 9. Sviluppo storico ed evidenza dei principii.

Nella sua classica opera « Die Mechanik in ihrer Entwickelung » (1), E. MACH studia profondamente lo sviluppo storico dei concetti e dei principii meccanici, richiamando e discutendo i problemi e le esperienze particolari da cui essi hanno preso origine e forma determinata.

Da questa esposizione, cui dovremo riferirci più volte nel seguito, appare che si possono, fino ad un certo punto, distinguere l'insieme degli esperimenti e delle riflessioni da cui è sorta la *Statica*, e quello che ha condotto alla *Dinamica*. La prima nasce in parte dai geometri greci, e soprattutto da ARCHIMEDE, e si svolge nei tempi moderni, per opera di STEVIN, VARIGNON, GALILEO ecc. fino a NEWTON. La seconda è scienza intieramente moderna, la cui fondazione si riattacca essenzialmente ai nomi di GALILEO, HUYGHENS e NEWTON. Come trapasso fra l'una e l'altra ci sembra meriti di essere menzionato il tentativo di *costruzione cinematica* di DES CARTES.

La storia del progresso delle idee porge insegnamenti istruttivi, mostrandoci la graduale estensione acquistata dai concetti, e facendoci vedere come l'esperimento istituito in casi particolari sia stato l'occasione di riconoscere e di fissare certe associazioni dei dati sensibili, che in parte si possono attribuire ad un anteriore lavoro istintivo di coordinazione delle osservazioni ed esperienze più familiari. Allorchè lo spirito umano giunge ad un tale riconoscimento, prova l'impressione di *scoprire*, all'infuori della esperienza, qualcosa di generale che altri riceverà come *principio evidente*.

S'insiste oggi da più parti, e con ragione, su questo punto, che « l'evidenza dei principii non costituisce in nessun caso una prova *a priori* contro esperienze possibili »; e noi non abbiamo motivo di ritornare sopra una questione sufficientemente discussa nel campo della Geometria.

Ma, a parer nostro, si procede in questo senso tropp'oltre, quando si viene a deprezzare l'*evidenza intuitiva*, mettendo in luce gli *errori* a cui essa ha condotto, senza tener conto sufficiente che questi hanno potuto essere corretti mercè una più giusta *interpretazione*. A questo titolo si avrebbe ugual motivo di deprezzare anche l'esperimento diretto, poichè esso non ci assicura dai pericoli di una interpretazione erronea.

Or dunque mentre ci appare non dubbio che l'evidenza intuitiva debba cedere in un eventuale conflitto di fronte ai responsi criticamente valutati dell'esperimento, ci piace rilevare che in fatto tali conflitti non si sono chiusi mai con una vera condanna della intuizione, ma hanno costretto questa ad abbracciare un campo più largo di dati sensibili, eliminando così l'apparente contraddizione.

(1) Op. cit. a pag. 255.

Queste riflessioni si adattano bene al caso delle rappresentazioni meccaniche.

I deprezzatori dell'intuizione insistono sulla circostanza che certi principii da noi tenuti come evidenti, contraddicono direttamente alle vedute dei nostri più antichi predecessori. Nessun argomento sembra più proprio di questo a stabilire irrefutabilmente che l'evidenza non ha alcun rapporto con uno *sviluppo psicologico* secondo leggi determinate, ma poggia soltanto sopra un *fondamento storico*; a meno che non si volesse ammettere un mutamento dello spirito umano, ipotesi su cui non vale la pena di fermarsi.

Un esempio convincente, nel senso anzidetto, sembra esser porto dal *principio d'inerzia*, di cui consideriamo qui soltanto la parte geometrica cioè « il movimento rettilineo di un punto materiale, su cui non agiscano forze ». Se, come oggi si pretende, questo principio partecipa, in un senso che risulterà poi precisato, alla evidenza delle *simmetrie geometriche*, in qual modo i Greci lo avrebbero misconosciuto? in qual modo poterono essi pensare che i movimenti *naturali* sieno circolari?

Ebbene, la contraddizione è da interpretarsi nel senso che la rappresentazione nostra e quella dei Greci non si riferiscono al medesimo « spazio meccanico ». Nella serie delle associazioni ed astrazioni successive, per cui si è formato, come vedemmo, il concetto geometrico dello « spazio », è occorso di eliminare dai varii « spazii fisiologici », le dissimmetrie relative all'osservatore. Ora il punto di vista generale si è guadagnato nella Geometria, attraverso le rappresentazioni ottiche, astraendo dalla dissimmetria sistematica che la gravità introduce nei dati tattili-muscolari. Ma nello sviluppo integrativo della rappresentazione spaziale, dove si tien conto dell' « aspetto del movimento » sulla superficie terrestre, si introduce un'altra dissimmetria sistematica attinente alla rotazione della terra, di guisa che il primo prodotto dell'associazione ed astrazione degli « spazii fisiologici meccanici » è una *rappresentazione geocentrica*. Per superare questa tappa, e giungere al grado astratto corrispondente a quello della Geometria, occorse emanciparsi dal punto di vista geocentrico nella considerazione dell'universo, ed ognun sa come a ciò sieno stati condotti i fondatori della Dinamica, poichè i progressi dell'Astronomia venivano appunto a convalidare il sistema di COPERNICO.

Non è inutile, pel nostro scopo, osservare che nella rappresentazione geocentrica l'ipotesi de movimento circolare, accolta dai Greci, risponde ad una veduta semplificata dei fatti astronomici, comunque si sia cercato di convalidarla colla pretesa *nobiltà* del cerchio fra tutte le linee!

Per chi riconosca l'origine sperimentale delle conoscenze intuitive, può sembrare assurdo di dare a queste, nell'ordinamento della Scienza, un posto in qualche modo privilegiato; la fiducia che in esse riponiamo, comunque

possa venire spiegata psicologicamente, costituirà un argomento di diffidenza nel confronto colle esperienze volontariamente proseguite e coscientemente criticate. Ma le cose appariranno in un aspetto diverso se si rifletta che queste esperienze e questa critica, almeno in un primo periodo di sviluppo, riescono facilmente incomplete ed unilaterali, laddove l'elaborazione incosciente dei dati sensibili rappresenta una più grande molteplicità di confronti ripetuti secondo diversi rapporti; perciò la conoscenza intuitiva ha un valore probabile superiore a quello della conoscenza sperimentale, *purchè* l' una e l' altra *si riferiscano al medesimo ordine di relazioni*; è invece nella delimitazione del campo di applicabilità, e nell'allargamento progressivo di questo, che l'esperienza voluta vince l'intuizione.

Perciò, senza pretendere di ridurre ogni conoscenza scientifica a rivestire un carattere intuitivo, è vivamente da desiderare che gli acquisti sperimentali promuovano uno sviluppo adeguato della rappresentazione intuitiva, per la quale i fatti nuovi si riattacchino alla gran massa delle conoscenze istintive, più antiche, mediante concetti maggiormente estesi; il riattacco costituisce una garanzia che non vi è contraddizione logica fra le varie parti del nostro sapere, poichè ne sarebbe stato impedito il proseguimento di certe associazioni ed astrazioni, effettivamente compiutesi.

Queste riflessioni ci conducono a riconoscere che non è fuor di luogo il tentativo, più volte rinnovatosi nella storia della Meccanica, di porre il suo fondamento su principii evidenti.

Si ebbe torto soltanto a sforzare codesta evidenza, sia interpretandola come necessità *a priori* sulla base di argomenti metafisici, sia estendendola al di là del suo proprio campo.

Il tentativo cui si è accennato conduce soprattutto al resultato di distinguere una *prima categoria di principii, i quali si presentano come il presupposto fondamentale di una rappresentazione astratta dei dati meccanici, dove questi vengono associati subordinatamente ai concetti di spazio e di tempo,* e da ciò appunto traggono la loro *evidenza*.

Ma questi postulati evidenti, che costituiscono le premesse della Statica e della Cinematica, non bastano a fondare la Dinamica; occorre *aggiungervi* delle ipotesi suggerite direttamente dall'esperienza e soltanto in parte connesse a talune rappresentazioni intuitive, le quali insomma non hanno più *nulla di evidente*. Qui soprattutto ciò che vi è d'arbitrario nella nostra costruzione scientifica, si spiega collo *sviluppo storico*; all'opposto una *interpretazione psicologica della storia* non consente di ammettere egualmente una determinazione indifferente dei primi principii, comunque essi si sieno rivelati in modo parziale e successivo nello studio di problemi particolari.

§ 10. **Concetti fondamentali.**

Lo sviluppo della Meccanica pone in luce, oltre ai concetti di spazio e di tempo, i concetti fondamentali di: *punto materiale, forza, movimento, massa e legami.*

I concetti nominati si presentano generalmente connessi a certe rappresentazioni, e quando si sia eliminato l'elemento subiettivo, resta in essi un insieme di rapporti, che si presentano come *supposizioni implicite.* I principii meccanici, propriamente detti, pongono fra i concetti stessi delle relazioni che costituiscono le *ipotesi esplicite della Meccanica.*

Codeste relazioni permettono di definire formalmente qualcuno dei suddetti concetti per mezzo dei rimanenti. Si ha così una riduzione che viene proseguita da taluni tanto innanzi da condurre ad una *interpretazione nominalistica* della Meccanica.

§ 11. **Nominalismo matematico.**

La tendenza al nominalismo, che investe oggi tutti i dominii della Fisica teorica, merita qualche speciale considerazione.

Codesta tendenza costituisce in un certo senso il pericolo correlativo ai vantaggi di un'applicazione sempre più estesa delle Matematiche, ed ha come causa determinante particolare una illeggittima estensione dei criteri formali della critica, che sembra generare un *falso concetto del rigore scientifico.*

Il *rigore fisico* chiede che le conoscenze vengano appoggiate al massimo numero di fatti, controllate colla massima varietà di prove, e che le relazioni enunciate sieno sempre accompagnate da uno specchio di dati sperimentali, onde desumere il *grado di approssimazione* secondo cui esse possono tenersi valide.

Una rappresentazione matematica della realtà fisica atta a soddisfare a tali requisiti, sarebbe fornita da una *analisi di approssimazione* come quella che ha formato oggetto delle interessanti meditazioni del ROBIN. Ma generalmente riesce utile sotto diversi aspetti, e talora può dirsi necessario, di procedere più speditamente ad un'astrazione preliminare di un certo gruppo di dati empirici, enunciando come *postulati* le relazioni che nella loro forma semplice ed esatta sono supposte rappresentare *la parte più notevole* dei rapporti reali, e rigettando quindi sull'intiera teoria gli errori provenienti dalle piccole differenze trascurate.

Un corpo di dottrina così costituito può assorgere ad una forma concettuale ben definita, per modo che lo sviluppo deduttivo si compia in esso rigorosamente, senza alterare il contenuto delle ipotesi. Ma per contro, nei riguardi della realtà, la teoria sviluppata rimane sempre una rappresentazione approssimata; i postulati appariscono affetti da un errore, che soltanto

nuove osservazioni ed esperienze, modificanti le ipotesi adottate, potranno progressivamente correggere.

Ora, in ogni momento dello sviluppo scientifico, il rigore chiede che codesti errori sieno possibilmente apprezzati fissando ad essi un qualche limite, ma soprattutto che essi non vengano nascosti, che la coerenza formale della teoria non faccia illusione sul carattere approssimato delle conoscenze contenutevi.

È mai possibile che un progresso logico nella critica delle definizioni e dei postulati valga a rimuovere o a diminuire siffatti errori?

La domanda stessa deve apparire assurda a chi abbia compreso il significato della astrazione compiuta. Essa ci ha permesso di spezzare il problema in due parti: l'una ipoteticamente semplice, l'altra illimitatamente complicata, ma i cui elementi esercitano sulla previsione effettiva una più piccola influenza. Resta pertanto al teorico piena libertà di rimaneggiare le premesse ipotetiche ai suoi scopi di trattazione matematica, ma deve essere lungi da lui la pretesa di conferire con ciò alla teoria un senso fisico più rigoroso.

Egli può tuttavia ridurre il numero dei postulati enuncianti codeste premesse; e la cosa è molto facile. Quei postulati si presentano infatti sotto la forma generale di equazioni fra quantità, che s'immaginano definite mediante certi processi di misura; basterà dunque assumere un'equazione di tal genere come *definizione* di una delle quantità suddette in luogo della misura corrispondente. Così al posto di una serie di esperienze, necessariamente inesatte, si pone un atto libero di convenzione che ha un senso logico preciso. Ecco dunque eliminato dalla teoria un elemento di errore perchè è eliminato il fatto a cui l'errore stesso si riferiva.

Un simile procedimento ammette, in qualche caso, giustificazioni, in vista di scopi particolari. Quando, p. es., si tratti di riconoscere i cambiamenti da introdurre in un sistema d'ipotesi prese in una certa gerarchia, dove una data *forma*, che si ritiene capace di ricevere un contenuto più preciso, viene assunta come premessa fondamentale; si ha allora un procedimento di discriminazione dei fatti supposti per cui si costruisce una teoria tanto meno espressiva quanto più plastica.

Ma, pur restringendone il senso, una teoria perfetta non potrà mai essere raggiunta!

Si provi infatti a trasformare tutti i postulati in semplici definizioni. Ecco eliminato ogni errore ma anche ogni conoscenza effettiva; il rigore assoluto della dottrina, così concepito come forma pura, si riduce ad un non senso!

Da una siffatta trasformazione non è a credere neppure che il matematico teorico possa ricavare qualche vantaggio.

Per lui c'erano soltanto delle equazioni da trattare analiticamente, secondo le regole precise dell'Analisi. Soltanto egli sapeva che codeste equa-

zioni rappresentano ipotesi imperfettamente verificate, ed è riuscito a nascondere ai propri occhi codesta imperfezione. La sua libertà di sviluppo matematico resta, come prima, teoricamente incondizionata; ma egli si è privato di una veduta dei motivi capaci di dirigere la sua ricerca ad uno scopo fisico.

I danni di un tal modo di procedere appariscono più gravi quando si guardi al confronto fra la teoria e l'esperienza, nelle verifiche e nelle applicazioni concrete. In difetto di una critica preventiva di ciò che la teoria stessa vuole effettivamente significare, si corre il rischio di adottare una misura del *rigore pratico* in diretto contrasto coi criteri strettamente paurosi del *rigore teorico*; cioè di prendere le quantità che comparivano nei calcoli da una deteminazione sperimentale qualsiasi, senza confronto alcuno; ed infine di interpretare la costruzione teorica in tanti sensi diversi, non distinti nettamente fra loro, in vista dei fatti che al momento occorre di giustificare.

È proprio questo il resultato a cui vogliono giungere i ricercatori di un assoluto rigore?

No certo; ma essi sembrano non accorgersi che questa sarebbe la conseguenza immancabile del nominalismo, a cui conduce una visione incompiuta della Scienza ed una pretesa trascendentale.

Coerentemente ai criterii che emergono dalla critica precedente noi ci proponiamo ora di analizzare i concetti fondamentali della Meccanica, mettendo in luce le varie ipotesi implicite ed esplicite in essi contenute, ed in ispecie le prime che compariscono spesso nell'acquisto psicologico di codesti concetti come condizioni per l'associazione dei dati empirici mediante rappresentazioni astratte.

§ 12. **Punto materiale.**

Quantunque i primi problemi di Statica effettivamente trattati concernano dei *sistemi* relativamente complicati, come la *leva*, la *puleggia*, il *piano inclinato*, se si guardano gli sviluppi ulteriori appare conveniente di cominciare lo studio della Meccanica col prendere come caso elementare quello dei « *punti materiali* ».

Tale finzione è pienamente giustificata in conformità di quei criterii semplificativi della indagine scientifica, che P. VOLKMANN caratterizza come principii d'*isolamento* e di *superposizione* delle circostanze fenomeniche. Importa però di arrestarsi un momento a dilucidare il concetto del « punto materiale ».

Ma prima di ciò avvertiremo che codesta finzione potrebbe essere eliminata. Infatti G. A. MAGGI nei suoi « Principii della teoria matematica del movimento dei corpi » [1] ha mostrato come si possa fondare tutta la Meccanica dei corpi estesi senza riguardare il corpo come un sistema di punti.

[1] Milano, 1896.

Questo resultato, che ha un interesse filosofico e matematico, deve essere segnalato, se pure sembri a noi, sotto varii aspetti, opportuno di conservare un posto alla rappresentazione del punto materiale, soprattutto per i motivi seguenti:

1) In molte considerazioni un corpo può essere riguardato come un « punto » commettendo un errore che supera i limiti del *rigore fisico* attuale; e per quanto si allontanino i limiti di codesto rigore, appare che vi saranno sempre dei corpi, i quali, in un certo ordine di fenomeni, potranno riguardarsi come « punti » senza errore sensibile. In questi casi l'esigenza di eliminare l'errore insensibile, adottando un criterio *matematico* del rigore, sembra poco opportuna, ove essa porti, come qui accade, ad una rappresentazione più complicata.

2) La rappresentazione dei corpi come formati da elementi o « punti materiali » ha un così largo impiego negli sviluppi della Fisica teorica, che non si può rinunziarvi senza sacrificio.

Ma le difficoltà inerenti al concetto di « punto materiale » non possono essere passate sotto silenzio.

Sotto quali condizioni è lecito trattare un corpo come un punto materiale?

La prima condizione, che si ha di solito in vista, è che le sue dimensioni sieno assai *piccole relativamente a quelle di cui si considerano i rapporti*. A questo titolo, un granello di sabbia nello studio del movimento sopra la terra, e altrettanto bene un astro nei movimenti celesti, possono venire riguardati come punti.

Ma alla suddetta condizione se ne aggiunge un'altra, cioè che *nei fenomeni considerati sia indifferente la posizione del corpo, preso come mobile intorno ad uno dei suoi punti*. A questo titolo, p. es., una piccola sorgente di luce polarizzata, assimilabile ad un elemento di superficie, non può venire riguardata come un punto nei fenomeni ottici.

Vedremo più tardi l'importanza della accennata considerazione per la critica di taluni concetti fondamentali.

Procediamo a trattare successivamente della *Statica* e della *Dinamica del punto*, e poi dei *sistemi*.

§ 13. **Forza.**

« La forza è la causa oppure l'effetto del movimento ».

Coloro che conferiscono a questo giudizio il valore di una *definizione della forza*, sono responsabili della perturbazione di idee per cui si ritiene da molti che la forza sia un concetto *metafisico*, nel senso peggiore della parola equivalente a « non senso ».

Infatti l'affermare che qualcosa è causa di qualcos'altro, non può avere

significato alcuno, se non si tratti di riconoscere il legame di successione invariabile fra due fenomeni, già definiti come tali per mezzo di sensazioni.

L'esistenza di una *forza* è un *fatto fisico*, che viene definito da *sensazioni muscolari di sforzo o di pressione*. Sotto questo punto di vista la forza non ha nulla di misterioso o di metafisico, più che il moto o un altro fenomeno qualsiasi, la cui definizione reale si riduce sempre, in ultima analisi, ad un gruppo di sensazioni producentisi in certe condizioni volontariamente disposte.

Coloro che vogliono bandire dalla Meccanica l'idea della forza, se, sotto alcuni aspetti, possono giustificare la loro veduta collo scopo di una riduzione dei dati primitivi della scienza del movimento, in verun modo hanno diritto di pretendere che la idea anzidetta sia meno intelligibile di alcun'altra idea geometrica e cinematica, o che la *spiegazione* di essa involga difficoltà di un ordine superiore. Poichè un concetto fisico sempre si spiega ugualmente coll'indicarne il contenuto sensibile.

Tuttavia i tentativi di eliminare il concetto della forza, palesano la tendenza a sostituire la *spiegazione muscolare* dei fenomeni con una *spiegazione ottica*, sia in un senso generale attraverso l'ipotesi di enti fittizii (cfr. cap. VI), sia nel campo circoscritto della Meccanica astronomica, dove i fenomeni si presentano direttamente alla vista.

In questo campo veramente i dati muscolari appariscono come una supposizione, che taluno deride rilevando il carattere antropomorfico della forza attrattiva newtoniana: forse che l'attrazione fra terra e luna o fra terra e sole suppone le sensazioni muscolari di questi corpi?

Ma, se si lascia da parte lo scherzo, non si troverà nulla di ridicolo nella supposizione che un uomo posto sulla terra possa provare sensazioni muscolari corrispondenti all'attrazione lunare o solare; la prima si rivela a noi nelle maree, e la seconda può pure essere messa in evidenza, come modificatrice della gravità, mediante delicate esperienze. Si ha infatti una deviazione del filo a piombo che sale circa a 2″ nelle 24 ore, e che è stata recentemente misurata da S. NEWCOMB e VON STERNECK, come dovuta all'attrazione solare, in conformità della previsione teorica. Si noti che anche la supposizione di sensazioni muscolari per riguardo ad un uomo portato fuori della terra, conserva un significato, se pure divenga praticamente non verificabile.

Ad ogni modo una Dinamica astronomica ristretta ai dati visivi può essere edificata bandendo la supposizione della forza. Basterà considerare (col MACH) il principio newtoniano d'azione e reazione, come un rapporto fra le *accelerazioni* dei punti materiali in moto, ove entrano certi coefficienti (*masse*).

Ma se può riuscire interessante di ottenere così una descrizione cinematica dei movimenti dei corpi celesti, indipendente dalla Statica, non si

deve dimenticare che questa ha un valore assai ristretto, e che in ispecie porge una teoria della gravitazione nella quale la caduta dei corpi sulla terra viene disgiunta dal peso, e dove, p. es., le esperienze verificatrici di CAWENDISCH, non saprebbero trovar posto.

Che dire di una veduta la quale riesce a mutilare in tal modo le nostre conoscenze?

Ora veramente si deve avvertire che la considerazione del Mach, sopra riferita, non tende a sostituire in modo sistematico la forza con una definizione nominale, riguardandola cioè come il prodotto di una massa per una accelerazione. Ma in questo senso procede piuttosto la costruzione della Meccanica di KIRCHHOFF. Ed ecco che la forza così introdotta, p. es., nella teoria dell'elasticità, non esprime più il contenuto sensibile di ciò che ci rappresentiamo in questo campo come « tensione ».

Mentre nei riguardi dell'Astronomia la trattazione ottica della Meccanica poteva essere sotto un certo aspetto giustificata, l'estensione di questo indirizzo in una Meccanica generale non ha più alcun fondamento, se si eliminino i pregiudizii sulla « forza », e quei motivi che spiegano ma non rendono affatto accettabile il nominalismo matematico (cfr. § 11).

Le considerazioni svolte innanzi c'inducono a prendere la forza come concetto primitivo della Meccanica.

Il senso si rende più preciso mediante l'uso di appropriati istrumenti, e si *estende* mediante la supposizione che si collega al concetto di un *campo di forze*.

Un campo di forze si prende come *dato* (in rapporto a dati corpi e fenomeni che lo definiscono) allorchè si ammette la possibilità di riconoscere una forza agente sopra un certo punto materiale che venga trasportato nelle varie posizioni del campo.

Ora occorre rendere determinato il concetto della forza, analizzando i *dati* delle sensazioni che vi si connettono.

§ 14. **Dati geometrici della forza.**

Le sensazioni inerenti ad una forza determinano:

1) una *direzione* e un punto di *applicazione* cioè un *raggio*;

2) un *elemento intensivo* che si tratta di precisare.

Per ciò occorre anzitutto acquistare la nozione di « *forze uguali* applicate a punti diversi e diversamente dirette ».

Questa nozione ci viene primamente fornita, se pure in modo poco preciso, dal confronto delle sensazioni di sforzo e di pressione, che possiamo provare in posizioni diverse. Il giudizio di eguaglianza tra due forze, che esso permette, si rende quindi più preciso mercè l'associazione delle sensazioni suddette a dati fisici, come, p. es., al tendersi o al piegarsi di una

molla o di un filo elastico ecc., attesochè tali tensioni e pressioni connesse a certi corpi mobili, soddisfino sensibilmente alle due proprietà fondamentali:

1) di riprodursi (salvo particolari complicazioni) invariate quando il corpo ritorna alla forma e posizione primitiva;

2) di accordarsi fra loro per ogni posizione dei corpi a cui vengono riattaccate, tostochè si accordino per una posizione particolare.

Il procedimento da cui sorge così una rappresentazione delle « forze uguali » appare del resto parallelo a quello per cui s'introduce in Geometria la nozione di « figure uguali » mercè il moto dei corpi solidi, il quale soddisfa a certe condizioni d'invarianza rispetto all'organo tattile di un osservatore.

Ora deve essere notata la circostanza che una forza, comunque data sopra la terra, può venire sostituita da una forza di tensione uguale, esercitata da un peso per mezzo di un filo avvolto ad una puleggia; questa sostituzione offre il vantaggio di fissare le forze in modo facile e determinato, e di porgere una semplice immagine concreta degli elementi attinenti alla forza.

Nel fatto le forze generate per mezzo di pesi sono le prime cui si riferirono i fondatori della Statica; ma, quando i bisogni progrediti della tecnica e gli sviluppi della Scienza attrassero l'attenzione su altre forze, i principii posti ebbero un'estensione naturale immediata.

All'immagine concreta anzidetta si può riattaccare l'acquisto della *misura* di una forza, e quindi la determinazione del suo elemento intensivo per mezzo di un numero o di un segmento.

Basta infatti considerare le tensioni esercitate per mezzo di un filo a cui si facciano sopportare 1, 2, 3.... *pesi uguali,* notando che comunque si proceda ad una siffatta valutazione delle forze (per mezzo di materie pesanti diverse ecc.) si trova sempre che « i multipli di forze uguali sono uguali ».

Le esperienze che porgono così la misura (*statica*) di una forza costituiscono un caso particolare di esperienze più generali, ripetibili idealmente anche fuori della terra.

« Più forze agenti nella medesima direzione sopra un punto materiale possono sostituirsi a tutti gli effetti (di tensione, pressione ecc.) con una forza unica che si dice la loro *somma* ». E se si vuole che la *somma statica* di più forze ugualmente dirette venga rappresentata dalla *somma geometrica* di queste, ne risulta che « ad ogni forza corrisponde (a meno di un fattore che dipende dall'unità di misura) un *segmento orientato,* ben definito in grandezza oltrechè in posizione ».

§ 15. **Principii di simmetria statica.**

Una progressiva idealizzazione porge già, come abbiam visto, una semplice *immagine geometrica* della forza agente sopra un punto materiale. Ora a questa immagine si riattaccano i primi principii della Statica, con una tale evidenza che si dura fatica a riconoscere in essi qualcosa di più di una conoscenza geometrica.

Si tratta di certe *simmetrie* delle *forze in equilibrio*, che fino nella trattazione dei primi problemi di Statica si trovano adoperate in modo implicito, come nozioni già possedute:

1) Forze uguali ed opposte agenti sopra un punto O si fanno equilibrio, e viceversa.

2) Se un punto materiale A esercita una forza sopra un altro punto materiale B, questa ha come linea d'azione la retta AB, ed il punto B esercita su A una forza uguale ed opposta (*principio d'azione e reazione*).

È opportuno osservare che questi principii rispondono ad esperienze ovvie e familiari, le quali tuttavia (quanto al secondo) si riferiscono al caso di tensioni per mezzo di fili o di pressioni per mezzo di corpi solidi. Ma se la nostra mente cerca di rendersi conto del fondamento a cui essi si appoggiano, sorge l'idea che, secondo il principio di ragion sufficiente, si deducano dalla simmetria delle figure rappresentative; cioè nel primo caso dalla simmetria rispetto al piano perpendicolare in O alle due forze, nel secondo dalla simmetria dello spazio rispetto al segmento AB e al suo punto medio (indipendenza dalle rotazioni intorno alla retta AB e invertibilità del segmento).

Sarebbe un'illusione lo scorgere qui una *dimostrazione geometrica* dei suddetti principii statici. Le osservazioni ed esperienze sulle forze e sull'equilibrio, benchè molto prossime a quelle da cui sorge la Geometria, involgono veramente qualcosa di più che non è necessariamente compreso nella rappresentazione acquistata dello spazio fisico; tuttavia il contenuto di questa rappresentazione è estendibile, e le considerazioni precedenti mostrano che può estendersi in guisa da subordinare ad essa i dati statici presi in esame.

In altre parole i principii di simmetria della Statica, esprimono già in parte che « le immagini geometriche (segmenti orientati) sono adeguate alla rappresentazione delle forze, relativamente ai fenomeni fisici dell'equilibrio ». Sotto questa forma appare il loro contenuto reale come una *condizione di possibilità* per quella rappresentazione cui si lega la loro evidenza.

§ 16. **Composizione delle forze.**

La somma di forze ugualmente dirette non è altro che un caso di « *composizione delle forze* ».

Il principio generale di questa, si lascia separare in due parti, l'una statica e l'altra dinamica:

1) Nei fenomeni d'equilibrio più forze applicate ad un punto possono essere sostituite da una forza *resultante* unica e ben determinata, *equivalente al sistema*.

2) Sistemi di forze staticamente equivalenti, applicate ad un punto, sono anche equivalenti riguardo ai loro effetti dinamici (movimento).

Questo secondo postulato riconosciuto da D'ALEMBERT nella Dinamica dei sistemi, costituisce già nel caso del punto una supposizione che la critica deve mettere in luce, ma che esce dal dominio proprio della Statica strettamente intesa.

La scoperta del principio di composizione delle forze si è raggiunta storicamente, in modo induttivo, attraverso casi particolari; STEVIN ci è arrivato appunto in base alla composizione delle forze perpendicolari, indirettamente conosciuta. Più tardi, cioè in seguito alle costruzioni dinamiche di GALILEO e di NEWTON, VARIGNON riuscì a stabilire più esplicitamente la composizione delle forze deducendola da quella dei movimenti, e trattando la Statica come un caso particolare della Dinamica.

Per l'una e per l'altra via il resultato fu acquisito nella sua forma concreta (*parallelogramma delle forze*), e, soltanto dopo la scoperta, si pensò da D. BERNOUILLI e da FONCENEX di dedurre la regola di composizione dal principio astratto dell'esistenza della resultante e dai principii di simmetria. Questo metodo fu perfezionato da D'ALEMBERT e da POISSON, e ripreso ai giorni nostri da BATTAGLINI, GENOCCHI, DARBOUX, SIACCI, ANDRADE, in varii sviluppi interessanti.

Il MACH osserva che *non* si tratta qui di una *dimostrazione geometrica*. D'accordo con lui su questo punto, non sappiamo invece dividere l'opinione che codesto modo di trattare il problema sia da condannare come un non senso storico e psicologico. Se sta in fatto che la regola concreta di composizione di due forze fu trovata prima, e che essa viene porta da facili esperienze, ci sembra d'altra parte che una nozione implicita dell'*esistenza di una resultante* deve supporsi come idea direttrice delle ricerche conducenti alla sua determinazione. Infatti un'osservazione elementare ci rivela tutti i giorni che se un punto è tirato da più fili, occorre esercitare sopra di esso una trazione in un senso determinato affinchè si abbia l'equilibrio, esattamente come se il punto fosse tratto, nel senso opposto, da un filo unico. Ora si ha qui un esperimento semplicissimo, che può essere riguardato in un certo senso come qualitativo relativamente alla determinazione quantitativa della resultante, e a cui si è disposti per conseguenza ad attribuire un più forte valore di prova.

Si ammetta, come supposizione fisica, il *postulato* che « un sistema di

forze concorrenti equivale staticamente ad una forza unica ben determinata (*resultante*) ». Per valutare questa forza occorre sapere che :

1) la resultante può essere determinata sostituendo ad alcune delle forze componenti un sistema equivalente (*proprietà associativa e commutativa* della composizione);

2) sistemi di forze geometricamente uguali sono equivalenti, e danno quindi resultanti uguali.

Questi principii costituiscono altrettante supposizioni fisiche, ma queste si appoggiano, come i principii di simmetria di cui pure qui ricorre l'uso, alla supposizione generale che « le forze sieno adeguatamente rappresentate, in tutti i riguardi statici, dalle loro immagini geometriche ». Ed è giusto il fondamento della loro evidenza, la quale implica dunque una più larga coordinazione concettuale dei vari dati sensibili.

Non a torto, secondo noi, l'intelletto si riposa in siffatta evidenza, poichè essa esclude la possibilità di correggere le esperienze verificatrici del principio senza turbare profondamente la visione generale di tutti i rapporti statici, desunta dal confronto di osservazioni ed esperienze conscie ed inconscie.

§ 17. **Fondazione della Dinamica.**

Lo sviluppo storico della Dinamica da GALILEO, a HUYGHENS a NEWTON, fa capo essenzialmente a due principii generali : l'equazione del moto di un punto, e il principio dinamico d'azione e reazione.

Cerchiamo di renderci conto in qual modo ed in qual senso codesti principii si sieno determinati nella sistemazione newtoniana, e quali ipotesi implicite si riattacchino ai concetti da essi legati.

L'equazione del moto di un punto materiale, contenuta nelle due prime leggi di Newton, esprime che « le forze sono proporzionali alle *masse* e alle accelerazioni impresse, ed hanno la stessa direzione di queste ». La formula vettoriale è

$$f = m\,\omega.$$

Si assegna così una determinazione quantitativa del rapporto causale che le più elementari esperienze fanno conoscere tra forza e moto, e vi compare un coefficiente m che dipende dal punto.

È opportuno rendersi conto delle difficoltà che si sono dovute superare per giungere alla formula anzidetta.

Osserviamo anzitutto che le forze generalmente prodotte coi muscoli, o col piegamento di una molla ecc., ove non siano equilibrate da una resistenza, hanno una durata brevissima e si traducono in un *impulso*, che si misura direttamente dalla *velocità* del corpo lanciato.

Quando si tratta invece di una forza continua, p. es. della gravità,

la constatazione sensibile di essa come effetto muscolare, si compie in modi diversi per un corpo in moto, a seconda della velocità con cui la nostra mano accompagna (e ritarda) il movimento. Aggiungasi ancora l'influenza dell'attrito nella trazione sopra la terra, per cui la forza traente appare sensibilmente proporzionale alla velocità del moto.

Da tutto ciò emerge che la prima idea, suggerita da un grossolano empirismo, conduce al principio aristotelico delle forze proporzionali alle velocità; soltanto un'analisi penetrante ha potuto condurre alla scoperta che le forze sono in relazione, non colle velocità, ma colle *accelerazioni impresse*.

Ora come si è fatta la correzione?

Vi è qui un problema storico da investigare più profondamente. Galileo riconobbe la falsità del principio aristotelico? Certo almeno nei suoi studii sulla caduta dei gravi è implicitamente considerata una forza (la gravità) come *indipendente* dal movimento e si riconosce che essa è proporzionale all'accelerazione.

Ma la questione cui si collega lo sviluppo dello stesso concetto di forza, riesce chiarita ove si richiami il dibattito sopravvenuto fra le scuole di DES CARTES e di LEIBNIZ, « se la velocità (v) o il suo quadrato debba prendersi come misura di una forza agente sopra un punto mobile ».

Sappiamo oggi che sussiste la proporzione di Des Cartes se si considerano forze costanti (f) agenti durante un certo tempo (t), e quella di Leibniz se ci si riferisce a forze agenti per un certo cammino (s) del mobile. Le quantità

$$f\,t = m\,v$$

ed

$$f\,s = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

hanno ricevuto rispettivamente i nomi di « *quantità di moto* » e « *forza viva* »; la prima misura l'*impulso* della forza, la seconda l'*energia cinetica* (E) acquistata dal mobile o il *lavoro* compiuto.

Differenziando la prima delle due equazioni soprascritte si ottiene la equazione fondamentale di Newton

$$f = m\,\frac{dv}{dt} = m\,\omega;$$

differenziando la seconda si avrebbe un'altra equazione

$$f = \frac{d\,E}{ds},$$

che porge ugualmente la misura dinamica della forza, e può prendersi come punto di partenza in una *Dinamica energetica*.

L'equazione fondamentale del moto di un punto materiale

$$f = m\,\omega\,,$$

riassume una serie di fatti che le conferiscono il senso fisico proprio.

Questo senso deve essere determinato con una conveniente interpretazione, la quale esige di:

1) fissare il sistema di riferimento rispetto a cui sono definiti il moto e la forza;

2) definire fisicamente il coefficiente m (massa).

Galileo, nello studio della gravità, aveva preso come sistema di riferimento « la terra », come misura della massa « il peso ». Newton, passando nel campo dell'Astronomia, dovette modificare tali concetti, e cercò di conferir loro una base assolutamente generale, assumendo: come sistema di riferimento uno *spazio in quiete assoluta*, come massa un numero appartenente al corpo preso isolatamente da tutti gli altri (prodotto della massa per la *densità*). Ma alla deficiente definizione di questo numero supplì col portare dalla Statica nella Dinamica il *principio d'azione e reazione*, assunto dunque come un « *rapporto fra le accelerazioni* » dei punti in movimento.

Una veduta trascendente dominò lo spirito del sistematore della Dinamica e lo condusse ad enunciare definizioni e principii in tal forma che, strettamente presi, riescono in parte privi di significato.

Ma una nuova sistemazione dei principii emerge dalla stessa opera newtoniana, se con opportuna critica si cerchi di trarre fuori le premesse supposte dagli sviluppi positivi della dottrina, generalmente accolti come acquisto non contestato fino ai nostri giorni.

Una critica siffatta ci proponiamo appunto di svolgere nei seguenti paragrafi, discutendo successivamente:

1) dei modi di determinare il movimento, che Newton concepiva come assoluto, rispetto a cui valgono le leggi dinamiche;

2) della massa, dei postulati che vi si collegano, e della relazione loro col principio newtoniano d'azione e reazione;

3) della legge fondamentale espressa dall'equazione del moto del punto materiale, ed in ispecie di una duplice supposizione sovrappostasi in essa, di cui resta traccia nella formulazione newtoniana.

Trarremo infine da questo esame alcune conclusioni generali intorno ai principii della Dinamica.

§ 18. **Movimento.**

Il concetto geometrico del movimento è affatto relativo.

Essendo dato un insieme di corpi, si dice che essi si muovono, gli uni rispetto agli altri, quando le loro mutue distanze variano col tempo. Una tale definizione, perfettamente simmetrica rispetto ai varii corpi, non ci permette in alcun modo di distinguere quale fra i corpi considerati *veramente si muova*, e quale *resti fermo*; anzi le parole sottolineate, se non ci si riferisca a qualcos'altro, restano prive di significato.

La scelta di un corpo, di forma invariabile, che voglia riguardarsi come fisso, è dunque la scelta di un *sistema di riferimento* del moto, che, sotto l'aspetto geometrico o cinematico, è affatto convenzionale ed arbitrario. La *sensazione del movimento* di un oggetto qualunque corrisponde dapprima a una scelta personale di questo sistema di riferimento: i cambiamenti di posizione degli oggetti vengono riferiti a noi stessi. Nè si andrebbe oltre a questa concezione fisiologica del moto, se l'aspetto dei fenomeni non variasse in corrispondenza a quella sensazione che chiamiamo il *movimento di noi stessi*.

Per associazione e astrazione delle diverse rappresentazioni fisiologiche del moto, si è indotti alla rappresentazione fisica in cui si assume la terra come sistema di riferimento; e questa scelta, in quanto si studino i fenomeni sulla terra, s'impone a tutti gli spiriti.

Quanto tempo ci volle perchè l'uomo venisse a riconoscerne la relatività nel campo dell'Astronomia!

E che rude lotta contro una credenza radicata nei cervelli, che in mancanza di ragioni si pretese di sostenere colla violenza!

Ma infine lo studio più profondo dei movimenti interni del sistema solare ha imposto a tutti la scelta di un riferimento più comodo, il sole, che in luogo della terra sia preso come fisso.

Eppure il sole stesso si muove, oltrechè di una rotazione intorno a sè stesso, anche di una traslazione rispetto all'insieme delle stelle lontane.

Quale fra queste si dovrà ritenere come fissa, dal momento che esse mutano di posizione le une rispetto alle altre, come si desume dal confronto delle osservazioni astronomiche più antiche, e dai recenti studii spettroscopici in base al principio di DÖPPLER?

In mancanza di un sistema di corpi, che ragionevolmente potesse prendersi come fisso a preferenza di altri, si è voluto dare al *moto assoluto* un significato prescindente dai corpi; concepito lo *spazio* come un oggetto invariabile di riferimento, si è ritenuto il moto una variazione di posizione dei corpi *rispetto allo spazio*. Tale è la concezione trascendentale accolta da NEWTON.

Tuttavia è per noi inutile di confutarla, dappoichè abbiam visto nel cap. IV non esservi alcun oggetto rispondente alla parola « spazio ».

D'altronde, dati i progressi del pensiero critico, nessun filosofo moderno

potrebbe attribuire un significato al moto assoluto, definito nel modo detto innanzi.

Ma questa definizione ricompare sotto una nuova forma quando si postula (p. es. dal WOLKMANN) un *etere* riempiente l'universo, rispetto a cui il moto venga considerato. È ben inteso che bisogna ritenere le parti di questo etere invariabili di posizione le une rispetto alle altre.

Il postulato dell'etere può in tal modo condurre ad attribuire un senso positivo al moto assoluto?

La risposta involge la discussione di qualche questione di fatto.

È evidente che la parola « etere » surrogata semplicemente allo « spazio vuoto » non dice nulla di più. Ma diverso è il caso se si ammette p. es. un'azione ritardatrice di attrito esercitata dall'etere sulla materia in moto, postulando in sostanza, in luogo della legge d'inerzia, la tendenza dei corpi ad uno stato limite di quiete relativa; allora questo stato limite viene preso come sistema di riferimento del moto cui si vuol attribuire un senso assoluto.

Però all'ipotesi anzidetta manca una base di fatto.

Più plausibile sembra considerare il « movimento relativo all'etere » come « movimento relativo alla luce o ad altri fenomeni elettro-magnetici », riattaccandosi ad un ordine di fatti cui appartiene l'*aberrazione astronomica*.

Ci riserviamo a ritornare nel cap. VI sulle questioni che qui prendono origine; ma diciamo fin d'ora che nell'aberrazione suddetta e nei fenomeni analoghi, le esperienze non mettono in luce nulla di più che il *movimento dei corpi, gli uni rispetto agli altri*.

Ritorniamo dunque al movimento relativo dei corpi.

Non potendo trovare qualcosa di fisso nel confronto di essi, individualmente presi, si affaccia naturalmente l'idea di derivare qualcosa di *fisso dal loro insieme*. Così p. es. nel sistema planetario si presenta non arbitraria la scelta del *baricentro*, come punto fisso di riferimento.

Ma presumibilmente (ammessa l'infinità dell'universo astronomico [1]) non esiste un *baricentro del sistema di tutti i corpi celesti*, cioè un punto limite dei baricentri dei diversi sistemi parziali di corpi, *indipendente dall'ordine* in cui i suddetti corpi vengano presi.

Tuttavia se l'universo astronomico non ci porge dei *punti* che possano ragionevolmente ritenersi come *fissi*, una semplice osservazione ci conduce a determinare delle *direzioni fisse* o *quasi fisse relativamente all'insieme dei corpi*.

L'osservazione a cui alludiamo è la seguente :

[1] Relativamente a questa ipotesi cfr. S. ARRHENIUS « Die Unendlichkeit der Welt » in *Rivista di Scienza* « Scientia », N. X, (1909).

Mentre il processo dei mezzi ottici ci fa scoprire stelle a *distanze sempre più grandi*, le loro *velocità relative*, per quanto si può arguire dalle variazioni angolari dei raggi visuali e dal principio di Döppler, *non superano certi limiti*, comparativamente piccoli.

Ora se a questa osservazione si dà il valore di un *postulato* generale, ne consegue che: *le rette congiungenti i punti materiali lontani* (stelle) *tendono col crescere delle distanze a direzioni che restano invariabili le une rispetto alle altre*.

Che codeste direzioni limiti sieno da ritenere come *astronomicamente fisse*, apparirà naturale poichè esse rappresentano un ideale sistema di riferimento relativo all'insieme di tutti i corpi celesti. Per essere più esatti, poichè in realtà codesto limite è irraggiungibile, diremo che l'universo astronomico, ove si accolga il postulato anzidetto, ci porge un sistema di direzioni tanto *più fisse* quanto più lontano si riesce a spingere l'osservazione.

Il valore pratico della determinazione anzidetta si rileva dal fatto che i raggi visuali condotti dalla terra a tutte le stelle propriamente dette, conducono già a direzioni i cui angoli non variano sensibilmente che *dopo anni*, e porgono quindi un riferimento sufficiente per i bisogni ordinarii; una correzione progressiva si può introdurre, ove occorra, mediante un confronto delle variazioni angolari, cioè scartando le stelle più vicine che variano più rapidamente delle altre la loro orientazione.

È molto notevole che le leggi della Dinamica newtoniana conducano d'altra parte a ritrovare le direzioni fisse sopra definite. Ed un tale acquisto compensa ampiamente l'infelice espressione di NEWTON, che ha ammesso il concetto del moto assoluto come dato a priori.

Come abbiamo detto l'equazione del moto di un punto materiale fu considerata dapprima implicitamente da GALILEO, nel caso della gravità, e come *relativa alla terra*; ma un confronto più largo dei dati astronomici porta a correggere codesta legge, mostrando che essa ha un valore più preciso ove sia riferita alle direzioni delle stelle. Ora se oggi si vuol dare un senso positivo alla supposizione che Newton accoglie implicitamente, col moto assoluto, sembra che si debba enunciare il seguente *Postulato*:

Le leggi dinamiche si verificano tanto più precisamente quando si riferiscano ad un sistema di assi le cui direzioni si accostino di più alle direzioni astronomicamente fisse.

Mercè le leggi dinamiche si può dare alle « direzioni fisse » un altro senso che non dipende più direttamente dall'Astronomia, ma che è pur sempre *relativo*. Ciò può esser fatto sia riferendosi al moto di un punto materiale, sia al moto di un *corpo solido*, nel qual caso la Dinamica permette di determi-

nare certi *assi* e *piani invariabili*, cioè assi e piani che formano *angoli costanti con quelli* determinati analogamente per *un altro corpo mobile*.

Importa di riconoscere più precisamente che in tutte queste determinazioni si trovano soltanto direzioni o giaciture di piani invariabili e *nulla di più*.

A tal fine prendiamo come punto di partenza la legge newtoniana del moto, e distinguiamo i *sistemi di riferimento in due categorie* :

1) sistemi rispetto a cui vale la legge suddetta;

2) sistemi rispetto a cui l'equazione del moto è diversa e più complicata.

Uno qualunque dei sistemi della prima categoria (α) può essere designato *convenzionalmente* come *fisso*, e si può parlare di *movimento* (se si preferisce anche di movimento *assoluto*) rispetto ad . Ma si tratta di vedere che cosa ci sia d'*arbitrario* in tale convenzione, cioè in qual modo i sistemi della prima categoria anzidetta possano muoversi l'uno relativamente all'altro.

A tal fine, tenuta ferma la nostra convenzione, supponiamo di trovarci entro una gabbia chiusa P, la quale si muova in un modo qualunque negli spazii celesti; si domanda se e come esperienze opportune sul moto dei corpi entro P, possano darci delle indicazioni intorno al moto della gabbia stessa rispetto ad . Imaginiamo di portare con noi istrumenti, coi quali possiamo esplorare il campo interno a P, determinare direttamente ed indirettamente le forze agenti sopra un punto materiale che si muova in esso ecc.

Si prendono generalmente le forze determinate colle esplorazioni anzidette entro P come *forze assolute*, cioè indipendenti dal moto di P, ed allora un'analisi matematica della questione conduce al resultato che :

Il movimento del sistema P rispetto ad può essere determinato, con esperienze interne a P, a meno di una *traslazione uniforme*.

Cioè : I sistemi di riferimento della prima categoria, rispetto a cui vengono soddisfatte le leggi dinamiche, sono in quiete relativa, o si muovono l'uno rispetto all'altro di una *traslazione uniforme*.

Questa conclusione è erronea perchè tutte le possibili esperienze che mettono in luce delle forze entro P *hanno un significato relativo in parte al moto di* P.

È opportuno di spiegare più largamente il valore della nostra critica.

Un qualunque modo di constatazione sensibile di una forza ci fa conoscere o la forza relativa al sistema cui appartiene l'istrumento preso come fisso, o le differenze fra le forze che agiscono nei diversi punti del campo accessibile. Una forza che agisca ugualmente, con una stessa intensità e direzione, su tutti i punti di un campo è inapprezzabile, e relativamente a questo, ove si faccia astrazione dai corpi circostanti, si può riguardare come inesistente.

È vero che noi constatiamo, trovandoci su di essa, l'urto di una loco-

motiva, ma ciò avviene perchè la nuova forza opponendosi al moto agisce soltanto sul materiale che ci trasporta, non sulla nostra persona.

Parimente noi constatiamo la gravità agente ugualmente sui corpi posti sopra la terra; ma questa constatazione riesce possibile grazie alla resistenza della terra stessa che essendo sostenuta dagli strati inferiori è impedita di cadere, e si trova quindi come non soggetta alla medesima forza.

Se invece noi ci trovassimo chiusi in una gabbia cadente al suolo, proveremmo la sensazione della mancanza della gravità a cui siamo abituati; ma la nostra situazione durante la caduta, sarebbe affatto simile a quella di chi si trovasse analogamente in una gabbia posta fuori della sfera d'attrazione terrestre; soltanto l'urto colla terra risolverebbe ad un tratto, in un modo terribile il dubbio dell'ipotetico viaggiatore celeste che tentasse indagare il moto della sua prigione!

Dunque, restando entro una gabbia P, le esperienze interne non ci dicono nulla intorno alle traslazioni di P rispetto ad un sistema α della prima categoria, preso come fisso.

La cosa è diversa per le rotazioni di P.

Infatti se P ruota intorno ad un asse, potremo riconoscere entro il campo, contrariamente al postulato fondamentale della Dinamica newtoniana che esamineremo nel § 22, delle apparenti forze non posizionali che agiscono sui corpi in moto, le quali corrispondono alle *forze centrifughe composte* del teorema di CORIOLIS. In un modo praticamente più semplice, ma in sostanza equivalente potremo riconoscere il moto rotatorio di P con esperienze sul moto dei corpi solidi, giacchè constateremo p. es. che gli assi permanenti di diversi giroscopii mutano tutti ugualmente di direzione facendo fra loro angoli costanti e che occorre una forza per deviarli. Pertanto la conclusione positiva della nostra analisi è che:

La nozione della *forza relativa* ad un sistema di riferimento, permette di *determinare, con esperienze interne* interpretate conformemente ai principii della Dinamica, *il movimento* del sistema rispetto ad α soltanto *a meno di una traslazione qualunque*.

In altre parole: i sistemi della prima categoria, rispetto a cui valgono le leggi dinamiche non sono necessariamente in quiete relativa, ma possono muoversi, l'uno rispetto all'altro, di una *traslazione qualunque* (*uniforme* o *non uniforme*).

Una illustrazione delle cose dette vien porta dalle esperienze per le quali si è dimostrato *sulla terra* che questa *gira intorno a se stessa*; cioè dal pendolo di FOUCAULT, e dalla deviazione orientale dei gravi cadenti, prevista in base al teorema di Coriolis, e constatata da TADINI (1796) e più perfettamente da REICH (1831).

Il *fatto* contenuto nell'affermazione « la terra gira », a parte il confronto colle stelle, è dunque questo: nei fenomeni di movimento sopra la terra, analizzati con sufficiente esattezza, si riscontrano le stesse circostanze caratteristiche che si mostrano ad una ispezione grossolana nel movimento sopra un corpo ruotante, p. es. sopra un vascello che descrive un cerchio ecc.

L'affermazione che la terra gira intorno al sole ha teoricamente un significato analogo, ma non sembra che le esperienze suindicate possano farsi in modo tanto preciso da mettere in luce le circostanze di cui si tratta. Se però si confronta il movimento della luna intorno alla terra alla caduta di un grave, le perturbazioni di quel moto sono da interpretare in un senso analogo alle esperienze di Tadini e di Reich.

Una prova indiretta della rotazione della terra intorno al sole, si può avere anche sulla terra dalle esperienze che misurano la variazione della gravità durante il giorno (cfr. § 13).

L'analisi svolta fa vedere che il concetto dinamico del movimento, da Newton preso come assoluto, contiene implicitamente un fatto, cioè l'accordo di varii modi di determinazione di un sistema di direzioni facenti angoli invariabili.

L'analisi di codesto concetto deve soprattutto mettere in luce il fatto accennato; e ciò si ottiene lucidamente ove si assumano come direzioni di riferimento le *direzioni astronomicamente fisse*, e si postuli quindi (nella legge d'inerzia ecc.) la relativa fissità di altre direzioni definite dal moto dei corpi in date condizioni.

Si accede così alla proposta del MACH, che ha trovato ormai largo favore presso gl'intelletti più positivi.

Nei seguenti paragrafi parlando di « movimento » sottintenderemo appunto la suddetta determinazione astronomica del sistema di riferimento. Ma avremo occasione di notare esservi luogo a separare una *parte più generale della Dinamica, anteriore alla legge d'inerzia, che vale quando si considerino forze e movimenti in relazione ad un sistema di riferimento qualsiasi.*

§ 19. **Massa.**

Allorchè si vogliono indagare le circostanze determinanti del movimento dei corpi, si presenta naturale di distinguere per quanto è possibile i caratteri per dir così *interni* del corpo mobile, e le relazioni *esterne* di esso con altri corpi ecc.

Questa distinzione si affaccia assai nettamente nei primi casi dove si tratta di moto impresso con uno sforzo muscolare o colla trazione di un elastico ecc.; si ha allora una relativa indipendenza fra due elementi determi-

nanti che si sovrappongono nel fenomeno, quello che misuriamo come sforzo ecc. (la forza) e quello che riattacchiamo al corpo mobile, cioè il suo *peso* o la sua *massa*.

Peso e massa appariscono dapprima esattamente la stessa cosa, ma il MACH spiega acutamente in qual modo possano distinguersi mediante una esperienza ove due pesi sospesi ad una puleggia costituiscono un sistema in equilibrio indifferente, il quale tuttavia non può essere messo in moto senza impiegare uno sforzo proporzionale alla somma dei due pesi.

NEWTON avendo riconosciuto nella massa qualcosa di distinto dal peso, arrivò a rappresentarsela come *quantità di materia*, e volle spiegarne il concetto colla sua Definitio I: « Quantitas materiae est mensura eiusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim ».

Questa definizione viene generalmente criticata, perchè introduce al posto della massa un nuovo concetto non definito, la densità, altrettanto oscuro come quello che si vuole spiegare.

È tuttavia ingiusto di ritenere che, a causa di ciò, la definizione newtoniana sia affatto priva di significato.

La rappresentazione che è in essa contenuta può infatti interpretarsi come un insieme di condizioni definitrici, volte a caratterizzare un *invariante additivo* rispetto ad un certo *gruppo di trasformazioni fisiche* dei corpi (movimenti, compressioni e dilatazioni).

Cerchiamo di spiegare questa veduta.

Cominciamo dall'osservare che il confronto dei corpi ci conduce a raffigurarceli mediante concetti astratti, relativamente a cui possiamo parlare di corpi *fisicamente uguali*, e quindi di corpi *omogenei*. L'astrazione suddetta sta a significare il riconoscimento che i corpi designati come « uguali » possono venire *sostituiti* l'uno all'altro nei varii ordini di fenomeni (fisici, chimici ecc.).

Ora dal concetto generale di uguaglianza fisica si può procedere ad astrazioni ulteriori relativamente a certi ordini di fenomeni; corpi sostituibili rispetto a questi godranno di una uguaglianza relativa più generale, o avranno, se si preferisce, certi *caratteri uguali*.

Un modo generale di promuovere simili processi d'astrazione consiste nel considerare *gruppi di operazioni o trasformazioni* (fisiche, chimiche ecc.) *mediante le quali certi corpi disuguali possano ridursi uguali*.

L'astrazione conduce allora a definire una relazione di « uguaglianza » soddisfacente alle proprietà transitiva e simmetrica (capitolo III, § 14), purchè si tratti proprio di un *gruppo* di trasformazioni, nel senso che i matematici attribuiscono alla parola « gruppo », cioè:

a) insieme alle operazioni A, B, entri nel gruppo anche quella che si compone delle due successivamente eseguite (loro *prodotto*);

b) insieme all'operazione A entri nel gruppo l'operazione *inversa*.

Il più semplice gruppo di trasformazioni dei corpi è il *gruppo dei movimenti*, ed è nel concetto dell'uguaglianza fisica che essa non venga alterata dai movimenti; ciò si esprime dicendo che ogni uguaglianza fisica è *invariante* rispetto al gruppo nominato.

Un altro semplice gruppo di operazioni fisiche si ha dal dividere in parti e dal riunire in diversi modi i frammenti di un corpo; questo gruppo conduce ad una *uguaglianza fisica* più generale *che prescinde dalla forma geometrica*.

Viene dopo questo caso la considerazione del *gruppo* G costituito da *movimenti, divisioni e ricomposizioni, compressioni e dilatazioni* dei corpi.

La rappresentazione newtoniana della massa come « quantità di materia » conduce a cercare di definire per ogni corpo un *numero positivo* che

1) abbia lo stesso valore per corpi riducibili colle trasformazioni del gruppo G;

2) goda della proprietà *additiva* o distributiva rispetto alla somma di due corpi, per modo che « riunendo insieme due corpi si abbia un nuovo corpo la cui massa sia la somma di quella dei componenti ».

Ciò appunto si esprime dicendo che la massa viene definita come un variante *additivo dei corpi rispetto al suddetto gruppo* G.

L'*esistenza di tale invariante* implica un fatto supposto che deve essere postulato.

La necessità di questo postulato risulta dall'osservare che il gruppo più ristretto costituito dai movimenti e dalle divisioni e ricomposizioni, ammette uno ed un solo invariante additivo « il *volume* ».

Il postulato che qui occorre può essere enunciato nel modo più semplice riferendosi a corpi omogenei :

Sieno A e B due corpi omogenei fisicamente uguali, e si operi su B mediante divisioni e ricomposizioni, compressioni e dilatazioni; se dopo un ciclo qualsiasi di operazioni si giunge ad un corpo omogeneo contenente una parte uguale ad una parte di A, questo corpo ha lo stesso volume di A.

Limitiamoci per un momento a considerare un insieme di corpi le cui parti possano ridursi uguali con trasformazioni del gruppo G. Si può scegliere un corpo omogeneo di riferimento A, e prendere per ogni sua parte la *massa proporzionale al volume*, quindi definire la *densità* di un corpo elementare B (ritenuto omogeneo) come il rapporto inverso del suo volume a quello di un elemento trasformato uguale ad una parte di A. Allora la massa risulta definita, secondo la definizione di Newton, come *prodotto del volume per la densità*.

Il procedimento di astrazione che conduce a definire la massa secondo la rappresentazione newtoniana, non si applica, come abbiam visto, all'in-

sieme di tutti i corpi, ma soltanto ad un insieme ristretto di corpi, riducibili entro il gruppo G.

Ma *questo gruppo* G *si estende* allorchè, in base alla rappresentazione *atomica*, si figurano i corpi *chimicamente riducibili* come ottenuti mediante ideali divisioni e ricomposizioni (compressioni e dilatazioni) di parti. Ed il gruppo G esteso ammette ancora l'invariante additivo, definito pel gruppo ristretto, perchè il postulato sopra enunciato sussiste nella più vasta comprensione.

Questa è appunto la scoperta di LAVOISIER, il cui *principio della conservazione della materia* può essere espresso nel modo seguente :

Sieno A e B due corpi omogenei fisicamente uguali, e si operi su B mediante trasformazioni fisico-chimiche *interne*; se dopo un ciclo di trasformazioni si giunge ad un corpo omogeneo contenente una parte uguale ad una parte di A, questo corpo riprende lo stesso volume di A.

Si può quindi ritenere definita la massa per un sistema di corpi chimicamente riducibili, come *invariante additivo delle trasformazioni fisico-chimiche*.

Questa definizione corrisponde nella teoria atomica al *numero delle particelle elementari* dei corpi.

Ora la precedente definizione della massa si estenderà a tutti i corpi ove sia lecito adottare l'ipotesi rappresentativa dell'*unità della materia*, il cui senso positivo consiste :

1) nella possibilità di allargare il gruppo delle trasformazioni fisico-chimiche, considerando delle trasformazioni *iperchimiche*, rispetto a cui tutte le qualità di materia sieno reciprocamente riducibili;

2) nella estensione del principio di Lavoisier alle trasformazioni iperchimiche.

La questione delle trasformazioni iperchimiche è oggi nuovamente all'ordine del giorno, dopochè RAMSAY ha raccolto l'*elio* dalla emanazione del *radio*, ed ha interpretato l'esperienza come una trasformazione riduttrice dell'atomo. Non è escluso dunque che il progresso della Scienza possa attribuire un significato positivo alla definizione della massa basata sull'ipotesi rappresentativa dell'unità di materia, a parte le difficoltà pratiche di confrontare le masse in quest'ordine di idee.

A prescindere dalle problematiche trasformazioni iperchimiche, le trasformazioni chimiche fanno capo a qualità di materia irreducibili; in altri termini, per esprimerci col linguaggio matematico, esse costituiscono un *gruppo intransitivo* rispetto al sistema dei corpi.

Importa quindi di vedere che l'invarianza additiva rispetto a codesto gruppo non basta a definire in modo determinato la massa di un corpo.

Invero si considerino gli elementi chimici, designati con

$$A_1 \; A_2 \; \ldots;$$

a ciascuno di questi appartiene un invariante addittivo, rispettivamente

$$m_1 \; m_2 \; \ldots,$$

che contiene un fattore di proporzionalità determinabile ad arbitrio mediante la scelta delle unità di paragone. Ora una qualsiasi espressione del tipo

$$a_1 \, m_1 + a_2 \, m_2 + \ldots,$$

costituisce un invariante addittivo pei corpi composti

$$A_1 + A_2 + \ldots,$$

rispetto al gruppo delle trasformazioni fisico-chimiche.

L'espressione considerata contiene anzi tutti gli invarianti addittivi possibili; la massa vi rientra quindi corrispondentemente ad una determinazione particolare delle costanti $a_1 \; a_2 \; \ldots$; ma appunto codesta determinazione non viene fornita dalle trasformazioni chimiche. E, accanto alla massa, restano indiscernibili da essa sotto tale riguardo, altri invarianti addittivi, alcuni dei quali hanno un senso notevole e vengono considerati perciò nella Chimico-fisica, p. es. i caratteri volumetrici in rapporto al cosidetto O° assoluto, certi caratteri ottici, calorimetrici ecc.

Da ciò che precede emerge che l'ordine di considerazioni e di rappresentazioni per cui si tende a definire la massa di un corpo come un carattere *interno*, cioè indipendentemente dall'influenza che corpi esterni possono esercitare sul suo movimento, riesce soltanto ad una imperfetta determinazione di questo carattere.

L'analisi svolta conduce nondimeno a riconoscere che:

Esiste una classe di fenomeni di movimento (provocati coi muscoli o con pressioni elastiche ecc.) che si svolgono ugualmente ove si sostituisca al corpo mobile, ritenuto come un punto materiale, un altro corpo (punto) chimicamente riducibile di *massa uguale*; laddove la sostituzione di *masse disuguali* muterebbe il fenomeno.

Possiamo ritenere schematicamente questi casi di moto, come casi in cui il *moto è indipendente dalle condizioni fisico-chimiche del mobile*, salvo a

ricondurre più tardi il riconoscimento di codesta indipendenza alla esplorazione del campo di forze in cui avviene il moto.

Ora se s'immagina di avere direttamente definito la classe dei movimenti anzidetti, si possono definire come « uguali » le masse di corpi chimicamente riducibili, che possano *sostituirsi* in quei movimenti.

E l'importante è che *questa definizione si estende al caso di corpi qualunque*, perchè sussiste il seguente

Postulato della massa. Allorchè il movimento di un punto materiale A è indipendente dalle condizioni fisico-chimiche del mobile, si può, senza alterare il movimento, sostituire ad A un corpo formato da un'altra qualità di materia, presa in un rapporto quantitativo determinato con A.

In base a questo postulato si definiranno come *uguali* le *masse* di corpi chimicamente irriducibili che possano sostituirsi nei movimenti considerati, e si giungerà alla *definizione generale della massa*, risolvendo l'arbitrarietà che in essa rimaneva.

Il postulato della massa afferma in sostanza « l'indipendenza del moto dalla qualità della materia che si muove ». Ma codesta indipendenza è subordinata a condizioni di cui si è tenuto conto nell'enunciato, e che si possono determinare in modo più espressivo in base alle considerazioni seguenti.

Se ci rappresentiamo le forze che in ogni istante agiscono sui corpi in movimento, possiamo supporre che queste dipendano dalla qualità di materia dei corpi stessi o dal loro stato fisico; ma ammettiamo poi che il movimento risulti indipendente dalla qualità di materia, in quanto questa non modifichi le forze considerate.

Questo criterio rende più precisa l'applicazione del nostro postulato di sostituibilità. P. es., un punto A viene tirato da un filo elastico; in questo caso la forza non dipende dalla natura di A, quindi si deve ammettere che anche il moto segua ugualmente se ad A si sostituisca un altro punto materiale B, presa la quantità della materia di B in quella misura che costituisce una massa uguale ad A. Ora il postulato deve interpretarsi nel senso che le due masse di A, B riconosciute uguali nell'esperienza anzidetta, potranno venire surrogate l'una all'altra in un altro qualsiasi fenomeno di movimento, sotto le condizioni sopra notate. P. es., una molla preme su A, anche qui la forza non dipende dalla natura di A, quindi il moto di A deve seguire ugualmente come quello di B, quando questo corpo (invece di A) venga soggetto alla pressione della medesima molla.

Invece se A è una sfera elettrizzata in vicinanza di un'altra sfera analoga, sopra A agisce una forza dipendente dallo stato del corpo medesimo; in questo caso la sostituzione di B ad A, altera le forze e quindi anche il movimento corrispondente.

§ 20. **Postulato della massa e principio dinamico di azione e reazione.**

Dalla precedente analisi risultano due modi di procedere per astrazione ad una definizione della massa, definendo le « masse uguali » :

1) o si parte dalla considerazione di quei caratteri del mobile che, in un senso relativo, abbiamo ritenuto come *interni*, cioè che non dipendono dalle circostanze *esterne* determinatrici del moto;

2) o si considerano invece le varie sostituzioni possibili dei corpi in moto, in diverse condizioni, cercando dunque in qualche modo una *definizione esterna* della massa.

La prima via non conduce ad una definizione puramente determinata, ma mette in luce un fatto importante cioè un *rapporto fra le trasformazioni fisico-chimiche della materia e la legge del moto.*

La seconda via, cui ad ogni modo si deve ricorrere per completare la definizione della massa, conduce a riconoscere un fatto generale consistente nell'accordo di diverse sostituzioni possibili di masse uguali nel movimento.

Questo fatto che costituisce il nominato postulato della massa, può riguardarsi come contenuto nella equazione del moto quando si pone innanzi la considerazione delle forze; ma si può anche analizzare sotto un aspetto diverso, a prescindere dalle forze, cercando di eliminare ciò che vi è di sovrabbondante nella definizione di masse uguali. Conviene a tale scopo :

1) fissare l'attenzione sopra un certo ordine di fenomeni di moto e *definire* quindi, per mezzo di un'esperienza fondamentale, le *masse elementari uguali*;

2) *postulare* poi la sostituibilità delle masse uguali negli altri ordini di fenomeni, sotto le condizioni occorrenti.

Quest'analisi conduce a porre in relazione il concetto della massa col principio newtoniano d'azione e reazione.

Per definire le « masse uguali » è assai naturale di confrontare i corpi mediante esperienze elementari in cui essi entrino soltanto a coppie, ritenendo una coppia come *isolata* dall'influenza di corpi esterni allorchè questi sono molto lontani in guisa da non esercitare un'influenza sensibile.

Tale idea viene appunto sviluppata dal MACH [1], che prende come punto di partenza il *principio newtoniano d'azione e reazione.*

Siamo condotti in tal modo ad analizzare il significato di questo principio.

Ed anzitutto giova osservare che NEWTON scorse in esso una semplice estensione del principio di simmetria statica (§ 15) ammettendo implicitamente che « le forze, resultanti dalle azioni dei corpi gli uni sugli altri, agiscano

[1] Op. cit. pg. 226. Cfr. VASCHY « Nouvelles Annales de Mathématique », 1895. MAGGI op. cit. e « Enseignement mathématique », 1901

sui corpi stessi nel movimento come nell'equilibrio », cioè « agiscano come *propagantisi istantaneamente* ». Se si ammette questa ipotesi, che non partecipa in alcun modo all'evidenza della simmetria statica, il principio statico d'azione e reazione fornisce il *principio dinamico* newtoniano, il quale in virtù della legge del moto si traduce in un « *rapporto fra le accelerazioni* dei punti materiali in moto ».

È appunto in questo senso, reso indipendente dal concetto di forza, che il Mach assume il principio dinamico d'azione e reazione.

L'analisi del Mach (che integriamo qui rilevando esplicitamente la supposizione 3)) conduce ad esprimere i postulati contenuti nel principio suddetto, nel modo che segue :

1) Due punti materiali costituenti una coppia isolata, hanno accelerazioni dirette in verso opposto secondo la loro congiungente.

2) Se due punti materiali A, B, successivamente e separatamente confrontati ad un terzo C, prendono accelerazioni uguali (ed opposte), anche A e B, confrontati come facenti parte di una coppia isolata, prenderanno accelerazioni uguali (ed opposte).

3) Se si considerano successivamente le coppie isolate costituite dai punti materiali

$$A, C \quad , \quad B, C \quad , \quad A + B, C,$$

il rapporto della accelerazione di C a quella di A + B è la somma dei rapporti delle accelerazioni di C ad A e di C a B.

Basandosi sui postulati precedenti si può porre la *Definizione* : il *rapporto delle masse* di due punti materiali è il rapporto inverso delle accelerazioni che essi prendono, quando sieno confrontati in una coppia isolata.

(È opportuno aggiungere l'osservazione che le trasformazioni fisico-chimiche entro i corpi confrontati possono bensì alterare le accelerazioni suddette, ma non il loro rapporto).

Dalla definizione precedente risulta in ispecie il senso della locuzione « *masse uguali* », ed il postulato 2) esprime la *proprietà transitiva* dell'uguaglianza. La massa risulta quindi definita *per astrazione*, ed il suo *carattere additivo* è contenuto nel postulato 3).

Per chi accetti incondizionatamente il principio dinamico di azione e reazione, espresso dai postulati 1) 2) 3),, il postulato della massa, preso in senso meccanico stretto, appare *equivalente* a codesto principio. E diventa allora indifferente la scelta delle osservazioni o esperienze definitrici del « rapporto di massa », quali possono ottenersi riferendosi, p. es., alla *gravitazione* (VASCHY), all'urto (ANDRADE) ecc.

Occorre tuttavia tener presenti le condizioni a cui deve soddisfare un

corpo per essere ritenuto come un punto materiale (§ 12), e si deve notare che esse trovansi difficilmente realizzate nell'urto, dove la forma e l'orientazione dei corpi urtantisi influiscono sul fenomeno in guisa da condurre a sensibili deviazioni dalla legge teorica.

Osserviamo ora che *l'equivalenza* ammessa dal Mach, *fra il principio dinamico d'azione e reazione* (postulati 1) 2) 3)) *e il postulato della massa, è relativa alla sistemazione della Dinamica newtoniana.*

Suppongasi che il principio dinamico d'azione e reazione, e più propriamente il postulato 1), non sussista in generale, o almeno che, in un ordine di approssimazione apprezzabile, la sua validità si restringa ad una classe di casi. Allora la definizione della massa che vi è appoggiata dovrà riferirsi ad uno di questi casi, ma il postulato della massa inteso secondo il § 19, esprimerà ancora qualcosa relativamente ai fenomeni di moto per cui la condizione 1) non è soddisfatta.

In questo senso il postulato della massa ci appare più espressivo del principio dinamico d'azione e reazione. Da ciò si rileva il valore delle diverse rappresentazioni che conducono ai due concetti, presi dal Mach come identici.

Osserveremo infine che, indipendentemente dall'accoglienza del principio dinamico generale d'azione e reazione, il procedimento indicato dal Mach può condurre ancora ad una definizione delle masse, purchè si riferiscano le ideali esperienze definitrici a quei casi in cui si tratta di corpi *a contatto* o di punti legati distaccantisi per la rottura del legame dalla posizione d'equilibrio, e dove si assuma il *principio dinamico d'azione e reazione in un senso ristretto*, quale si presenta nella Meccanica di HERTZ.

Così appunto il VOLTERRA, nelle sue lezioni di Meccanica di Pisa (1890), confronta le accelerazioni prese da due punti materiali rigidamente connessi costituenti una coppia isolata, nel momento in cui si rompe l'equilibrio per l'infrangersi del legame.

Si può osservare che, ove non si voglia qui escludere il concetto di forza, l'esperienza ideale accennata riconduce il confronto delle masse a quello delle accelerazioni assunte da diversi punti materiali soggetti a forze uguali. Ci si riattacca così alla legge fondamentale del moto, che (come vedremo) porge il più naturale fondamento al confronto delle masse di corpi chimicamente irriducibili, in uno sviluppo che segua fin dove è possibile la veduta 1) caratterizzata in principio di questo paragrafo.

§ 21. **Legge fondamentale del moto.**

La legge fondamentale del moto di un punto materiale si compendia, come abbiamo detto, nell'equazione vettoriale

$$f = m\,\omega.$$

Il suo significato risulta senz'altro determinato essendosi definiti i sistemi di riferimento rispetto a cui essa è valida (§ 18) e la massa m (§ 20); se invece la massa non sia stata prima definita in generale, l'equazione anzidetta conduce, come vedremo, a completarne la definizione.

Volendo istituire una analisi dei fatti supposti dalla legge del moto, conviene anzitutto richiamare le circostanze dello sviluppo storico che vi ha condotto.

L'acquisto è, come dicemmo, il frutto di una induzione, per cui la legge del moto dei gravi di GALILEO venne estesa da NEWTON al caso di forze qualsiansi variabili (caso cui si riferiscono numerosi studii di HUYGHENS).

La formulazione di Newton è contenuta nelle due leggi seguenti:

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Lex II. Mutationem motus esse proportionalem vi impressa, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

La Lex I esprime quel *principio d'inerzia* cui il MACH osserva Galileo essere stato condotto come a caso limite, dallo studio del moto dei gravi sul piano inclinato.

La Lex II viene interpretata come esprimente da sola l'equazione generale del moto

$$f = m\,\omega,$$

la quale nella sua espressione matematica comprende, per $f = o$, la Lex I. Onde vi è qui, pel Mach, un difetto di sovrabbondanza!

La nostra veduta è un po' diversa.

Anzitutto crediamo che per comprendere lo spirito della sistemazione newtoniana occorra eliminare il concetto affatto recente che la legge del moto sia una *definizione dinamica della forza.*

Per Newton la legge suddetta doveva esprimere una relazione fra due elementi che egli riguardava come già noti: la forza da un lato, e il prodotto della massa per l'accelerazione dall'altro.

Ma in qual modo poteva egli ritenere come nota la forza, se non sotto l'aspetto statico?

Se si ammette che la forza di cui si parla nella Lex II sia definita staticamente, la Lex II stessa assume un significato più ristretto dell'equazione differenziale

$$f = m\,\omega$$

resta infatti determinata a priori una delle costanti arbitrarie dell'integrale, in rapporto al sistema di riferimento. E per restituire alla legge tutta la gene-

ralità, in cui viene adoperata più tardi, occorre aggiungere una supposizione nuova che Newton ha creduto di esprimere adeguatamente colla legge d'inerzia (Lex I).

Interpretiamo dunque il testo newtoniano in questo senso: la Lex II si riferisca al moto incipiente, la Lex I al moto su cui non agiscono forze; la legge generale del moto ($f = m\,\omega$) risulta dalla somma delle due leggi newtoniane, dove per verità si assume implicitamente un'*ipotesi non dichiarata* che analizzeremo nel paragrafo seguente.

Riscontriamo i fatti supposti dalla *legge del moto incipiente*, dove si ritenga dunque che la forza sia definita staticamente, nell'equilibrio che precede il moto.

Il resultato di questa analisi si traduce in un sistema di postulati e di definizioni, che andiamo appunto ad enunciare, dove prendiamo la massa come un invariante addittivo delle trasformazioni fisico-chimiche, e però definita soltanto nel confronto di corpi chimicamente omogenei.

Postulato I. — Se una forza agisce sopra un punto materiale fermato, questo, ove non sia più ritenuto, comincia a muoversi nella direzione della forza.

Postulato II. — L'accelerazione impressa ad un punto dato è proporzionale alla misura statica della forza.

Postulato III. — Forze uguali imprimono a punti materiali (chimicamente) omogenei di massa uguale, uguali accelerazioni.

Postulato IV. — Se due forze f_1, f_2, agendo separatamente sopra due punti materiali M_1, M_2, gl'imprimono una uguale accelerazione ω, una forza uguale alla somma $f_1 + f_2$, agendo sopra il punto $M_1 + M_2$ ottenuto dalla riunione dei due dati, gl'imprimerà ancora la medesima accelerazione ω.

A questi postulati si può appoggiare la

Definizione. — Le masse di due punti materiali eterogenei si dicono *uguali*, se forze uguali agendo su di essi, imprimono loro accelerazioni uguali.

Ciò che questa definizione contiene di sovrabbondante è una conseguenza del postulato II: se due forze uguali ad f, imprimono ai punti materiali M_1, M_2 una medesima accelerazione ω, forze uguale a $2f$ imprimeranno loro una medesima accelerazione $2\,\omega$ ecc.

Inoltre il concetto della massa che risulta così definito, soddisfa ai requisiti che già abbiamo analizzato, il carattere addittivo della massa essendo contenuto nel post. IV.

A completare i precedenti postulati occorre ancora integrare il post. II, richiamando il *principio di* GALILEO che vedremo poi esteso da D'ALEMBERT nella Dinamica dei sistemi (§ 27). Lo enunciamo come

Postulato V. — Più forze applicate ad un punto materiale, producono

la stessa accelerazione (resultante dalle accelerazioni parziali) che la loro resultante statica.

Ora è importante istituire l'osservazione seguente:

I postulati I.... V, *che esprimono la legge fondamentale del moto incipiente, valgono pel movimento* (incipiente) *relativo ad un sistema qualsiasi* cui vengano riferiti insieme forze e moto, anche se si tratta di assi le cui direzioni variano rispetto a quelle astronomicamente fisse.

Invero sia α un sistema di assi aventi direzioni astronomicamente fisse, β un sistema comunque variabile rispetto ad α, P un punto in equilibrio rispetto a β che ad un dato momento cominci a muoversi rispetto a β stesso.

La legge del moto incipiente afferma che: se si riferiscano a β tanto la forza agente su P quanto il moto di P stesso, la forza è (in senso vettoriale) proporzionale all'accelerazione. Ora questo enunciato si converte nel seguente: la forza relativa a β è proporzionale alla variazione dell'accelerazione valutata rispetto ad α.

E risulta quindi, pel teorema di CORIOLIS, che la legge è indipendente dal sistema di riferimento.

Appunto in vista di questa indipendenza REECH e ANDRADE [1] hanno avuto l'idea di sostituire l'espressione classica della legge del moto, colla proporzionalità della forza alla variazione dell'accelerazione.

Tra la formula anzidetta e la nostra vi sono due differenze:

1) la prima è che noi ci restringiamo al caso del moto incipiente, nel quale soltanto può parlarsi propriamente di forza definitiva in modo statico;

2) la seconda è che noi prendiamo il concetto della forza come *relativo* allo stesso sistema cui si riferisce il moto (incipiente), e quindi non abbiamo da mutare l'espressione classica della legge.

La prima restrizione è soprattutto essenziale pel nostro scopo di mettere in vista un'ipotesi non dichiarata, che interviene nella successiva estensione della legge del moto.

§ 22. **Principio d'inerzia generalizzato.**

Abbiamo accennato che la legge generale del moto si ottiene integrando la legge del moto incipiente (Lex II di NEWTON) con quella d'*inerzia*, e aggiungendo di più un'ipotesi non dichiarata.

Infatti il passaggio dal caso del moto incipiente al caso generale, mediante il principio della resultante, richiede che la forza agente sopra un punto in movimento possa valutarsi come se il punto fosse istantaneamente fermato.

[1] « Leçons de Mécanique physique » Paris, 1898.

Questa ipotesi delle *forze posizionali* si presentava a Newton molto naturalmente, perchè la sua Dinamica (comunque rivestita di un aspetto universale trascendente) è infine l'estensione al campo astronomico della Dinamica terrestre di GALILEO. Appunto questo sviluppo estensivo spiega ai nostri occhi il modo come Newton è giunto alla enunciazione generale dei principii, e la forma in cui li ha espressi.

Ora se vogliamo postulare esplicitamente ciò che occorre aggiungere alla legge del moto incipiente, in luogo della Lex I, enunceremo il seguente *principio d'inerzia generalizzato* :

In ogni istante il movimento di un punto materiale avviene come se questo sia lasciato muovere a partire da uno stato di quiete, purchè

1) le posizioni rispettive dei corpi esterni (influenti sensibilmente sul fenomeno) non subiscano per tale supposta fermata alcuna modificazione;

2) alla forza agente sul punto, che si misura staticamente quando esso è fermato, si aggiunga un impulso uguale alla velocità del movimento.

È appena necessario di rilevare come questa legge postuli un fatto, verificabile con sufficiente approssimazione, tutte le volte che sia sufficientemente verificata l'ipotesi.

La Dinamica può anche *correggere* l'applicazione del principio, tenendo conto, p. es., della *resistenza del mezzo* entro cui un dato corpo si muove; si tratta allora di considerare anche il movimento del mezzo, o almeno di trarre da questo l'intervento di una forza nuova, dovuta, p. es., alla compressione del fluido o alla sua inerzia ecc., che dipende dalla velocità del dato mobile.

In questo senso delle *forze dipendenti dalla velocità* s'introducono nelle equazioni della Dinamica classica a surrogare nel moto di un sistema parziale ciò che tiene ad un sistema più ampio, dove i punti materiali si muovono sotto l'azione di *forze posizionali*.

Restano da chiarire due punti, cioè :

1) Le relazioni della consueta legge d'inerzia (Lex I) col principio d'inerzia generalizzato;

2) le relazioni di questo col principio dinamico newtoniano d'azione e reazione.

1) La consueta legge d'inerzia è un caso particolare del nostro principio, che si ottiene supponendo dato un campo di *forze nulle*. Il nostro principio equivale alla riunione di questa legge d'inerzia particolare e della ipotesi delle forze posizionali.

Osserveremo ancora che nella legge d'inerzia particolare, si distinguono due supposizioni : la conservazione della direzione nel moto, e la conservazione della velocità.

La prima è conforme all'intuizione geometrica del moto, se si pensano le forze come « azioni dei corpi », poichè un punto su cui non agiscano forze ci appare allora come un punto su cui non influiscono i possibili mutamenti dei corpi (lontani), e quindi la traiettoria del moto come una linea « che resterebbe invariata facendo ruotare l'universo astronomico attorno ad un suo elemento », cioè come una retta.

La conservazione della velocità è un principio paradossale rispetto alle esperienze familiari e rappresenta una induzione astratta, guadagnata come vedemmo da Galileo in un caso particolare, a cui conduce per continuità l'ipotesi delle forze posizionali congiunta alla legge del moto.

2) Le relazioni fra il principio dinamico d'azione e reazione e il principio d'inerzia generalizzato, si possono esprimere come segue :

Il principio dinamico d'azione e reazione, preso come rapporto generale fra le accelerazioni dei punti materiali in moto, è una conseguenza del principio di simmetria statica congiunto al principio d'inerzia generalizzato, purchè si ritengano le forze come « azioni fra i corpi ».

Il principio dinamico d'azione e reazione, nel senso ristretto hertziano, risulta già dal combinare la legge del moto incipiente e il principio di simmetria statica.

§ 23. **Apprezzamento sintetico dei principii.**

L'analisi dei concetti e dei postulati della Meccanica del punto, ci ha condotto ad enumerare le supposizioni implicite ed esplicite della scienza, le quali possono ora venir disposte nell'ordine seguente :

1) postulati dello spazio (cap. IV) e del tempo (§§ 3-8);

2) postulati della Statica : principii di simmetria e principio della resultante (§§ 15, 16);

3) principio della conservazione della materia (§ 19);

4) legge del moto incipiente (post. I-V, § 21);

5) ipotesi su cui si basa la costruzione di direzioni astronomicamente fisse (§ 18);

6) principio d'inerzia generalizzato (§ 22).

I postulati 2) e 4) valgono per l'equilibrio e pel moto relativi ad un sistema di riferimento qualsiasi. Soltanto il postulato 6) esige che le direzioni degli assi di riferimento siano astronomicamente fisse.

Tenuto conto di questo motivo, del modo di acquisto dei postulati stessi, dei loro rapporti di subordinazione ecc., apparirà ora naturale di stabilire una *gerarchia dei principii* :

a) i postulati 1) 2) riposanti direttamente sull'intuizione e controllati

da svariate esperienze dirette, dovranno essere ritenuti come le supposizioni più generali e più ferme in confronto alle rimanenti;

b) a questa base, statica e cinematica, si appoggeranno i postulati 3) e 4), non ugualmente evidenti all'intuizione, ma dimostrati con esperienze dirette;

c) il postulato 6) (vincolato fino ad un certo punto all'ipotesi 5)), e così ugualmente il principio newtoniano d'azione e reazione che ne deriva, verranno presi in terzo luogo come ipotesi, non più provate da esperienze dirette (conscie o inconscie), ma suggerite per induzione dallo studio dei fenomeni di gravitazione sulla terra e nel cielo, e riceventi da questo studio una verifica indiretta, subordinata all'accoglimento dei postulati precedenti.

In una forma più suggestiva enunceremo le precedenti conclusioni dicendo che:

I postulati 1)....5) *definiscono una Meccanica più generale, valida rispetto a qualsiasi sistema di riferimento, la quale comprende l'equilibrio e il moto incipiente.* Affinchè la Dinamica conduca a previsioni determinate occorre aggiungere a codesto sistema un'ipotesi, che nella Dinamica astronomica è espressa convenientemente dal principio d'inerzia generalizzato. Si potrebbe modificare questa ipotesi assumendo al suo posto qualche legge più complicata, come saremo condotti a fare nel cap. VI; ad ogni modo il principio d'inerzia generalizzato esprimerebbe codesta legge con un'approssimazione tanto più grande quanto più piccole sono le velocità considerate, cioè nei casi *relativamente* prossimi al moto incipiente. E questo è il caso del sistema planetario!

Qualche difficoltà potrà nascere soltanto dal considerare velocità enormemente più grandi (v. cap. VI).

§ 24. **Statica dei sistemi: legami.**

Ci siamo riferiti fino ad ora alla Meccanica del punto materiale; ma in molti casi si hanno effettivamente a considerare dei corpi con dimensioni non trascurabili, ed anzi non si può prescindere da una certa rappresentazione di questi nella definizione stessa della « forza che agisce sopra un punto ».

La forma, la grandezza, e in generale i caratteri geometrici dei corpi in equilibrio o in movimento, sono strettamente associati a certi elementi sensibili che designansi col nome di *natura* del corpo, nonchè alle forze che agiscono su questo.

Si può pensare il corpo come costituito da punti materiali fra cui si esercitino certe azioni o *forze interne*, ed allora la concezione del corpo si riduce a quella di un « sistema di punti e di forze »; il problema dell'equilibrio e del moto si trova quindi ricondotto ai principii della Meccanica del punto.

Ma le forze di cui si tratta sono veramente una supposizione che il più spesso può essere determinata da una verifica.

Riesce invece facile di riconoscere che, in molti casi familiari, certi caratteri geometrici si mantengono costanti indipendentemente dalle forze applicate (o variano in un certo rapporto con queste); si può allora esprimere l'osservazione ponendo ipotetici *legami* fra i punti del corpo, riguardato dunque come « un sistema vincolato da condizioni geometriche ».

Una tale supposizione deve essere presa semplicemente come la semplificazione ideale di un fatto accertato *a posteriori*, sia, p. es., del fatto che le mutue distanze dei punti di un corpo solido rimangono, dentro certi limiti approssimativamente invariabili.

Se al concetto dei legami si voglia sostituire quello dianzi accennato di un sistema di forze interne, o se all' opposto, come diremo nel cap. VI, si vogliano riguardare tutte le forze come reazioni dei legami, la considerazione simultanea di forze e legami impone alla nostra rappresentazione delle condizioni sovrabbondanti; ma essa sta in tal caso a significare che alcuni *resultati* (p. es. certi legami) vengono presi al posto di certi *dati* incogniti (forze interne) nella determinazione del fenomeno.

Rimandando dunque al cap. VI ogni questione intorno alla possibilità di ridurre codesti concetti primitivi, noi riterremo nel seguito forze e legami come elementi che hanno un significato positivo rispetto all'esperienza, e mercè i quali si rende possibile una trattazione dei fenomeni visibili senza allargare la rappresentazione ad un mondo invisibile. Avremo agio però di rilevare in più punti la necessità di ammettere fra i due concetti alcuni rapporti, che invero si collegano alle rappresentazioni suaccennate.

§ 25. **Leva e piano inclinato: principio dei momenti statici.**

La nozione dei legami si può dire implicita fin dall'inizio della Statica.

Infatti l'equilibrio di sistemi, come la *leva* e il *piano inclinato*, ha occupato ARCHIMEDE e STEVIN, prima che questi venisse condotto a considerare la composizione delle forze applicate ad un punto.

La storia della fondazione della Statica ci addita il cammino percorso dagli scopritori dei principii fondamentali dell' equilibrio, principii che si riattaccano alle nozioni dei *momenti statici* e dei *lavori virtuali*.

L'uguaglianza dei momenti statici come condizione d'equilibrio della leva è stata scoperta da Archimede, il quale ha preteso dedurla da postulati relativi a casi elementari di simmetria e dissimmetria, cioè « equilibrio ottenuto con pesi uguali attaccati a bracci uguali », e « disequilibrio derivante dall'attaccare pesi disuguali a bracci uguali o pesi uguali a bracci disuguali ».

Il MACH rileva nella dimostrazione di Archimede un errore necessario;

ed invero il ragionamento fa tacito uso dell'ipotesi che « senza alterare l'equilibrio, un peso applicato ad un braccio della leva possa essere diviso in due parti uguali che vengano allontanate simmetricamente dal punto di applicazione », ossia che « forze uguali e parallele, applicate perpendicolarmente ad un'asta rigida possano venir sostituite da una resultante applicata al centro dell'asta, la quale sia parallela alle componenti ed uguale alla loro somma ».

Resta nondimeno da apprezzare se l'ipotesi implicitamente postulata da Archimede, per l'evidenza intuitiva o per le condizioni in cui può essere verificata dall'esperimento, non rappresenti qualcosa di più credibile del teorema che « l'equilibrio della leva corrisponde all'uguaglianza dei momenti statici ». Ora sotto questo rapporto non possiamo condividere il giudizio dispregiativo del Mach; ci pare indubbio che la dimostrazione di Archimede sia veramente istruttiva.

Il suo valore, riguardato secondo il nostro punto di vista, diventa tanto maggiore se si tien conto degli sviluppi relativi alla *composizione delle forze parallele* agenti sui punti d'un sistema rigido, sviluppi che procedono in un senso analogo a quelli del § 16.

Una trattazione di FONCENEX, corretta poi da D'ALEMBERT e LAPLACE, permette infatti di dedurre una legge di composizione delle forze parallele dirette nello stesso verso, la quale riesce determinata a meno di una costante k, dalle ipotesi seguenti:

1) esistenza di una resultante unica;
2) proprietà associativa della composizione delle forze;
3) principii di simmetria.

La legge ordinaria, cioè « la resultante di due forze parallele ugualmente dirette è uguale alla *somma delle componenti* », è compresa nella precedente più generale, e corrisponde a fare in questa $k = \infty$.

Ora GENOCCHI ha mostrato che, in relazione al postulato di EUCLIDE sulle parallele, si deduce appunto $k = \sim$; ed i postulati statici ch'egli adopera nel suo ragionamento sono i seguenti:

4) il trasporto d'una forza lungo la linea d'azione;
5) il principio della composizione delle forze concorrenti, che invero viene qui interpretato in un senso più generale, dappoichè si tratta di sostituire colla resultante (agli effetti dell'equilibrio) non più delle forze agenti su un punto materiale libero, ma forze agenti su un punto materiale che fa parte di un sistema rigido [1].

[1] Per i rapporti della questione col postulato d'Euclide, cfr. R. BONOLA: « La Geometria non-euclidea », Bologna, Zanichelli, 1906.

Si troverà anche qui un resoconto del modo di trattazione del problema che è dovuto a LAGRANGE. Nonostante l'interesse e la semplicità di questo metodo, gli preferiamo tuttavia

Mercè questi sviluppi si acquista la veduta che la condizione d'equilibrio della leva, espressa dal principio dei momenti statici, all'infuori della verifica diretta pòrtane da esperienze quantitative, può essere riattaccata indirettamente ad esperienze in qualche modo qualitative, che si collegano in una rappresentazione sintetica di fenomeni.

Anche per altri sistemi semplici si può ottenere, in un senso analogo, una dimostrazione del principio dei momenti statici come condizione d'equilibrio.

Citiamo ad esempio la condizione d' equilibrio d'un grave sul piano inclinato, dedotta da STEVIN appellandosi al postulato che « una catena chiusa omogenea avvolta ad un triangolo, trovasi in equilibrio ». Anzi questo procedimento appare tanto più suggestivo che anche il Mach ne dà un giudizio favorevole.

§ 26. **Principio dei lavori virtuali.**

Il principio d'equilibrio basato sul confronto dei momenti statici costituisce il fondamento della Statica dei sistemi in una fase di sviluppo anteriore alle conoscenze dinamiche, nella quale le prime elementari esperienze esplicite vengono riattaccate immediatamente ad intuizioni dell'equilibrio stesso, indipendentemente dalla considerazione dei movimenti possibili.

Una fase ulteriore di sviluppo è contrassegnata dal ricorso a considerazioni dinamiche, ed in ispecie al confronto dei *lavori virtuali*, cioè dei lavori eseguiti dal sistema per piccoli (teoricamente infinitesimi) spostamenti conciliabili coi legami.

(Ricordiamo che dicesi *lavoro* eseguito da una forza f per uno spostamento di un punto, il prodotto della forza per la proiezione dello spostamento sulla direzione della forza stessa).

Una prima osservazione di STEVIN sull'equilibrio dei sistemi di pulegge, ed un'osservazione analoga più generale di GALILEO a proposito del piano inclinato, perfezionata poi da TORRICELLI [1], hanno condotto al principio d'equilibrio riconosciuto nella sua più vasta comprensione da GIOVANNI BERNOUILLI (1717), e posto poi da LAGRANGE a base della *Meccanica analitica*.

Il principio dei lavori o *delle velocità virtuali*, si enuncia come segue: La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema vincolato,

quelli citati nel testo, perchè in essi non ricorre alcuna intuizione dinamica, il che sembra conforme allo spirito della questione. Lagrange invece postula implicitamente che « sieno sostituibili rispetto all'equilibrio legami che permettono gli stessi movimenti ».

[1] Il principio di Torricelli dice che l'equilibrio dei gravi corrisponde al minimo (o al massimo) di altezza del centro di gravità. Lagrange ha osservato che a questo caso particolare può ridursi il principio generale da lui denominato delle velocità virtuali.

soggetto a forze qualunque, è che il lavoro eseguito dalle forze per uno spostamento virtuale del sistema sia nullo.

Questo principio esprime una supposizione molto generale, *relativa* però *alla natura dei legami* del sistema, e si deve riguardare (conformemente al punto di vista storico) come un acquisto induttivamente conseguito mercè una progressiva estensione del concetto stesso dei « legami ».

La dimostrazione classica che si suol dare oggi del principio suddetto [1], mette bene in evidenza che la sua validità in generale per tutte le macchine usuali dipende da un'analisi delle varie specie di legami che in queste vengono combinati.

Il procedimento dimostrativo si appoggia dunque alla constatazione che il principio sussiste per i casi elementari: punto libero, punto mobile sopra una superficie, punti legati, superficie che ruzzolano l'una sull'altra ecc. E tale constatazione si compie mercè un confronto diretto delle esperienze relative a questi casi, o mercè il confronto della condizione d'equilibrio espressa dall'annullarsi dei lavori virtuali con altre particolari condizioni d'equilibrio, che si suppongono note in base ad esperienze anteriori, conscie od inconscie, rievocate in una visione immaginativa dei fenomeni.

Appare quindi che il principio dei lavori virtuali collega con una supposizione generale un insieme di fatti, in parte rappresentanti come evidenti e trae dal loro insieme altri fatti che cadono sotto il controllo di svariate esperienze esplicite.

Importa insistere su questo punto che: la validità del principio dei lavori virtuali, in quanto si presuma dedotta dai postulati statici e da certe condizioni elementari di equilibrio delle macchine più semplici, è limitata dalla natura dei legami.

Ma nulla osta ad uno sviluppo induttivo del principio che importi la sua applicazione a casi irriducibili ai tipi esaminati; con ciò si *estende* veramente la *supposizione* contenuta nel principio stesso, e si lascia alle conseguenze dedotte di legittimarne il significato più comprensivo.

Come esempio notevole di una tale estensione si può citare il caso a cui si è condotti dal prendere il legame d'invarianza delle distanze in un senso infinitesimale; ciò accade appunto nei problemi d'equilibrio dei *fili* e delle *superficie flessibili* e *inestendibili*. Un'altra estensione si ha nel problema dell'*equilibrio idrostatico* ove si assume come legame l'*invarianza di volume* ecc.

In un senso diverso si estende il principio dei lavori virtuali quando si

[1] Cfr. p. es. APPEL « Traité de Mécanique rationnelle », Paris, Gauthier et Villars, 1893 (p. 225).

trattano casi dove non si prendono veramente le *forze* come *date*, ma, lasciando da parte ogni ipotesi su queste, si valutano direttamente i *lavori* che entrano in gioco; così, p. es., nella teoria dell'*elasticità* (cap. VI). Ci si accosta in tal modo a quello sviluppo della Meccanica classica che si concreta nella costruzione della Energetica (cap. VI).

Importa finalmente accennare a due osservazioni.

La prima è che il principio d'equilibrio espresso dall'annullarsi dei lavori virtuali si riferisce sempre a casi in cui i legami stessi sono relazioni geometriche traducibili con *equazioni*. Se più generalmente si considerino anche legami espressi da *diseguaglianze* (legami *unilaterali*) anche il principio stesso deve essere trasformato, come è noto, in una diseguaglianza.

La seconda osservazione è che il principio dei lavori virtuali, come in genere la Meccanica, si riferisce al *caso limite* in cui si può *fare astrazione dagli attriti*. Deve essere però menzionato il recente tentativo di ALMANSI di trattare l'attrito come un caso di forze con legami (in parte unilaterali); dacchè sembra resultarne un'estensione assai interessante.

§ 27. **Dinamica dei sistemi : principio di D'Alembert.**

Una osservazione di HUYGHENS nello studio del moto oscillatorio, ripresa in altre forme da GIACOMO e poi da GIOVANNI BERNOUILLI, è stata elevata a principio generale da D'ALEMBERT (1743).

Un sistema di forze U agenti sopra un corpo costituito di punti vincolati, può essere sostituito agli effetti del moto, da un sistema di forze V applicate agli elementi (punti) del corpo, uguali ai prodotti delle masse di questi per le accelerazioni effettivamente generate dalle U.

Le *equazioni del moto* del corpo si trovano quindi espresse dalle condizioni di equivalenza statica dei sistemi di forze U e V, cioè dalle *condizioni di equilibrio* del sistema delle *forze perdute* U — V.

Abbiamo già rilevato (§§ 16, 21) come questo principio contenga una supposizione di fatto già nel caso del punto materiale. Importa ora osservare che *il principio generale di D'Alembert è una conseguenza del postulato di* GALILEO *relativo alla Dinamica del punto*, ove si accettino talune *ipotesi implicite* che si riattaccano al *concetto dei legami*.

Infatti la dimostrazione del principio generale di D'Alembert si trae tosto dall'ammettere che :

1) i legami possono venir sostituiti ad ogni istante da forze (*reazioni*) agenti sui punti del sistema, dipendenti dalle forze applicate;

2) la resultante dinamica delle forze che agiscono su ciascun punto equivalga in ogni momento alla resultante statica (postulato di Galileo);

3) applicando a tutti i punti del sistema, simultaneamente, forze uguali

e contrarie alle resultanti dei legami (e delle forze date) non si alterino le reazioni di questi.

In ispecie l'ipotesi 3) esprime una rappresentazione dei legami e delle loro reazioni, che vengono pensate come opponentisi a cambiamenti di distanze o a certi movimenti dei punti del sistema, e restano quindi invariate allorchè permangono queste circostanze determinanti.

Il principio di D'Alembert preso insieme a quello dei lavori virtuali, ha permesso a LAGRANGE di tradurre in equazione il problema del moto di un sistema vincolato, tutte le volte che i legami siano espressi da equazioni e si riducano infine ai tipi elementari considerati.

Le *equazioni del movimento* di un sistema esprimono sotto una forma matematica precisa che « il movimento stesso è determinato dalla conoscenza delle forze applicate, dei legami, e delle posizioni e velocità (iniziali) dei punti del sistema in un dato istante ». Queste equazioni racchiudono come caso particolare le condizioni d'equilibrio.

Nello sviluppo deduttivo della Meccanica analitica si è riconosciuto utile di trasformare il principio di D'Alembert, o meglio il teorema che da esso si ottiene usufruendo del principio dei lavori virtuali, in altre forme *equivalenti* suscettibili spesso di una più rapida applicazione.

Il principio di GAUSS *del minimo sforzo* ed il *principio di* HAMILTON, sono appunto trasformazioni dell' anzidetto teorema di D' ALEMBERT-LAGRANGE; ma quanto al primo principio è da osservare che esso ha per GAUSS un significato più generale, in quanto comprende anche il caso di legami unilaterali.

§ 28. **Principii delle forze vive e della minima azione.**

Riferiamoci espressamente al caso dei sistemi cui si applica il teorema di D'ALEMBERT-LAGRANGE.

Poichè questo teorema conduce alle equazioni del movimento, il movimento stesso risulta determinato date le forze, i legami, e le posizioni e velocità (iniziali) dei punti del sistema che possono assumersi ad arbitrio in un dato istante.

Deriva da ciò che ogni altro principio determinante il moto di sistemi siffatti,

1) sarà una conseguenza logica del teorema di D'Alembert-Lagrange;

2) oppure implicherà una qualche condizione restrittiva dei dati (forze e legami).

Il citato principio di Gauss, che si estende anzi ad una classe più generale di fenomeni, e similmente il principio di Hamilton, offrono esempii del primo caso.

L'interesse di ricercare principii più restrittivi, corrispondenti al secondo caso, si collega alla veduta che « le *forze* e i *legami* non sieno elementi *arbitrarii* del fenomeno dinamico », ed in ispecie che i loro reciproci rapporti implichino una limitazione, la cui conoscenza diventi quindi necessaria per procedere più innanzi nella previsione concreta dei fatti.

Se, p. es., si ammetta di estendere la concezione astronomica newtoniana delle forze come « azioni dei punti materiali, esercitantisi secondo il principio dinamico d'azione e reazione » (*forze centrali*), e se si riducano quindi i legami ai casi che possono risultare da tali forze (cfr cap. VI), si verrà appunto ad introdurre una condizione restrittiva che permetterà di dedurre dal teorema di D'Alembert-Lagrange qualche principio determinante più espressivo.

Effettivamente l'ipotesi delle forze centrali conduce anzitutto a stabilire un resultato di grande importanza fisica, cioè il *principio delle forze vive*, dal quale risulta poi una più semplica determinazione del movimento.

Facciamo brevemente la storia di questo principio.

Per primo HUYGHENS, nello studio dei movimenti pendolari, ebbe ad osservare che « la variazione della somma delle forze vive dei punti di un sistema in moto è uguale ed opposta a quella dei lavori eseguiti dalle forze », e questo teorema si estende al caso generale cui si riferiscono le equazioni di Lagrange.

Ma vi è di più: la variazione della forza viva o del lavoro può venire spesso valutata senza conoscere le traiettorie percorse nel movimento, dipendentemente soltanto dalle *configurazioni iniziale* e *finale del sistema*. Il germe di questa osservazione trovasi in GALILEO; questi notò che l'acquisto di forza viva di un grave cadente dipende soltanto dall'altezza verticale della caduta: HUYGHENS ed EULERO dettero all'osservazione di Galileo un significato più esteso.

Finalmente DANIELE BERNOUILLI riconobbe che l'osservazione stessa ha un valore generale nell'ipotesi delle forze centrali. Infatti in tal caso le forze ammettono un *potenziale*, dipendente soltanto dalla configurazione del sistema, e « la variazione della forza viva del sistema in moto si misura in ogni istante da quella del potenziale ».

Questo è appunto il principio delle forze vive, che (come vedremo nel cap. VI) prelude a quello della *conservazione della energia*.

Per i sistemi soggetti a forze che ammettono un potenziale, il principio delle forze vive permette di ridurre quelli di Gauss e Hamilton ad una espressione più semplice, la quale costituisce il cosidetto *principio della minima azione*.

Il movimento avviene in modo che la variazione del valore medio della forza viva del sistema in ogni intervallo di tempo risulta minima.

Questo principio precede storicamente GAUSS; fu enunciato dapprima, in forma un po' vaga, da MAUPERTUIS, e precisato da EULERO; LAGRANGE avvertì il suo legame col principio gaussiano.

§ 29. **Verificazione della Dinamica.**

Risulta dai precedenti paragrafi che uno sviluppo psicologico dei dati empirici è riuscito a proseguire le associazioni ed astrazioni rappresentate dai concetti di spazio e di tempo, colla costruzione di una Statica e quindi di una Dinamica che comprende la Statica stessa come caso particolare.

Codesto sviluppo psicologico può riguardarsi come una serie d'induzioni, procedenti in parte da esperienze inconscie, in parte da esperienze consciamente eseguite e coordinate alle prime per modo da estendere la visione immaginativa o intuizione dei fatti.

La varietà di queste esperienze, la loro intima associazione in un sistema generale di supposizioni, mercè cui vengono ad accordarsi e a controllarsi le une colle altre, costituisce un accertamento preventivo delle supposizioni stesse, e porge quindi una garanzia del loro valore in un ordine molto elevato di approssimazione, quantunque sia legittimo a questo riguardo di discriminare i principii classificandoli in una gerarchia (cfr. § 23).

Per una più precisa e certa valutazione della Dinamica, si impone ora di sottoporre ad una verifica le conseguenze che se ne deducono.

Il teorema di D'ALEMBERT-LAGRANGE, che riassume le supposizioni della Dinamica prese nel loro insieme, esprime un rapporto generale fra certi dati empirici: movimento di un corpo, forze agenti sui punti di esso (cioè campo di forze entro a cui il corpo si muove), distribuzione di massa (densità) del corpo stesso, e legami fra i suoi punti.

I principii della Meccanica, in ispecie quelli della Meccanica del punto, possono pensarsi come determinazioni particolari di quel rapporto, corrispondenti a condizioni ipoteticamente semplici; e però la deduzione del teorema di D'Alembert-Lagrange dai principii suddetti, significa che il fenomeno dinamico viene spiegato nella sua complessità come la sovrapposizione di un certo numero di fenomeni elementari.

Ora la verificazione della Dinamica esige una serie di casi concreti in cui i supposti dati (moto, forze, ecc.) possano venire valutati coll'esperienza, in un certo ordine di approssimazione.

Occorre dunque in particolare che:

1) Si abbia un campo di forze note; sia p. es. un campo di forze costanti come quello della gravità sulla terra ecc.

2) Si possa valutare la massa del corpo in moto, e la sua distribuzione (densità).

3) Si possano determinare con sufficiente precisione i legami fra i punti del corpo, come avviene soprattutto nel caso dei *corpi solidi*.

Queste condizioni si trovano assai bene soddisfatte in due casi, che rientrano appunto nel campo dei fenomeni dal cui studio è sorta la Dinamica:

a) Nel movimento dei corpi solidi liberi alla superficie della terra (caduta dei gravi, lanciamento dei proiettili ecc.), dove però interviene la difficoltà di tener conto della *resistenza dell'aria*, il cui apprezzamento preciso conduce a integrare il sistema in moto aggiungendo al grave il fluido circostante, cioè un sistema soggetto a legami più difficilmente determinabili.

b) Nei movimenti del sistema planetario.

Qui il sistema completo può ritenersi costituito di corpi solidi, e sebbene s'ignori il modo di variare della loro densità, è lecito di fare astrazione da questa conoscenza riguardando i corpi stessi, ora come punti, ora come sfere o ellissoidi omogenei o la cui densità cresca con una certa uniformità verso il centro. Nelle principali questioni dell'Astronomia di posizione l'errore inerente a tali ipotesi riesce trascurabile, e però basta valutare nel loro insieme le masse e le forze che vi agiscono.

Ora queste determinazioni sono in parte legate fra loro, e dipendono da una ipotetica estensione di certe esperienze; così p. es. da quelle di CAWENDISCH, di CARLINI, di AIRY, e dalla constatazione delle forze prodotte dalle maree, messe a riscontro colle osservazioni astronomiche, si argomentano nel modo più diretto le attrazioni interplanetarie; dalle esperienze di BESSEL sul pendolo, confrontate alle osservazioni astronomiche, si argomenta che la misura della massa è proporzionale all'attrazione che essa esercita ecc. Tuttavia è da rilevare che il grado di esattezza delle accennate esperienze terrestri appare generalmente inferiore a quello delle osservazioni astronomiche, dalle quali appunto, mediante opportuni confronti, si trae d'ordinario una correzione dei valori delle masse.

Pertanto il procedimento di verificazione della Dinamica che viene esperito dagli astronomi, ha questo significato:

La verificazione della Dinamica resta subordinata all'accoglimento di ipotesi sulle forze e sulle masse che vengono alla lor volta direttamente verificate dal confronto delle osservazioni astronomiche con certe esperienze terrestri, nell'ordine di approssimazione più ristretto di queste ultime.

Una verificazione più precisa della Dinamica è fornita dalla Astronomia planetaria, soltanto in questo senso: si può determinare una ulteriore approssimazione delle masse e delle forze in guisa da rappresentare nel loro insieme le osservazioni astronomiche, e stabilire delle previsioni, le quali si trovano confermate entro limiti di grandissima precisione; cioè con uno scarto angolare di 15″, ossia di 1″ di tempo, pel moto della luna in due secoli e mezzo, e parimente con uno scarto massimo di 8″ di angolo, o di metà di 1″ di tempo,

pel moto di Mercurio in un secolo (uno spostamento di 41″ del perifelio); per gli altri pianeti lo scarto suddetto resta inferiore ad un angolo di 2″, quantunque conduca ad errori apprezzabili relativamente al nodo di Venere e al perifelio di Marte [1].

Dinnanzi a tali resultati il sentimento primo e più forte è sentimento di compiacenza e di ammirazione, che eleva l'animo in un'apoteosi della Scienza.

Ma chi già possiede illimitata fiducia nel progresso di questa, trarrà dal successo nuova lena alla ricerca di una conoscenza anche più precisa.

Ed invero gli scarti sopra riferiti, benchè praticamente minimi, sono ancora apprezzabili coi nostri delicati istrumenti e superano i limiti d'errore prevedibili nell'applicazione della teoria newtoniana; essi richiedono pertanto una *spiegazione* adeguata.

Ora si è condotti a scegliere fra le ipotetiche spiegazioni seguenti:

1) Si può correggere l'errore con una estensione delle osservazioni (p. es. riconoscendo l'esistenza di nuove masse interplanetarie o la non sfericità del sole ecc.).

2) Si deve per ciò modificare la legge dell'attrazione, tenendo ferma la Dinamica newtoniana nella sua interezza, ed assumendo quindi una forza attrattiva ($f(r)$) funzione della distanza r, ma non più rigorosamente proporzionale a $1 : r^2$. In questo senso è stato proposto da HALL di sostituire al 2, l'esponente 2,000.000.151.

3) Occorre modificare propriamente le supposizioni contenute nella Dinamica newtoniana, o almeno una parte di queste, p. es. la propagazione istantanea dell'attrazione e quindi il principio d'inerzia generalizzato.

Trattandosi di un ordine di approssimazione molto elevato è difficile dire se, conformemente all'ipotesi 2), non sia possibile una determinazione della funzione $f(r)$ che restringa gli errori entro limiti trascurabili; ma una tale ipotesi certo deve apparire poco soddisfacente senza il conforto di qualche rappresentazione, ed è quindi per recare un piccolo peso alla nostra fiducia nella Dinamica.

L'idea di correggere l'ipotesi dell'attrazione, ammettendo un tempo finito di propagazione, si è presentata a LAPLACE, il quale tuttavia non ha considerato questa correzione come riguardante i principii stessi della Dinamica newtoniana e però connessa verosimilmente a qualche altra correzione di questi. Il calcolo di Laplace, rinnovato da LÉHMAN FILHÉS (1884), ha portato ad una velocità di propagazione milioni di volte più grande di quella della luce; e sembra impossibile discernere una tale velocità da una propagazione istantanea [2].

(1) Cfr. TISSERAND: « Traité de Mécanique céleste », t. IV, cap. 29.
(2) TISSERAND, op. cit., t. IV, cap. 28.

Lasciamo a questo punto la verificazione astronomica della Dinamica; il grado di approssimazione raggiunto, a dir vero già meraviglioso, sembra difficilmente sorpassabile entro questo campo di osservazioni, al quale si dovrà dunque ritornare soltanto dopo un confronto di più larghe esperienze (cfr. cap. VI).

All'infuori dei due casi principali, su cui ci siamo fermati innanzi, giova considerare quale verifica della Dinamica ci porgano altri ordini di fenomeni più complessi, e particolarmente in qual modo una tale verifica venga porta dal funzionamento delle macchine.

Ora tutti sanno che qui le previsioni della teoria esigono correzioni molteplici; le forze, le masse, i legami e i movimenti, che ci appariscono come parte *visibile* del fatto, non bastano più a determinarlo; occorre considerare accanto a questi degli *elementi perturbatori*, ed in prima linea l'*attrito* cui si collegano fenomeni di *riscaldamento*, *elettrizzazione* ecc. Si è quindi costretti a riconoscere che la Dinamica rappresenta in tali casi una conoscenza grossolanamente approssimata, e di più che le condizioni suddette hanno un'influenza *sistematica*, e non possono quindi essere trascurate neppure in una *teoria statistica*.

Tuttavia codesto apprezzamento verrà modificato nel senso di una verifica più precisa della Dinamica ove si riesca ad *estendere l'insieme dei dati visibili*, tenendo conto, p. es., dei movimenti vibratorii messi in evidenza dal suono ecc.

Ora codesta estensione è teoricamente illimitata, se si ammetta di oltrepassare mediante ipotesi il campo dell'esperienza. Accanto alla parte visibile dei fenomeni, si sarà indotti così a costruire un mondo ipotetico *invisibile*, che allontanandosi sempre più da ciò che cade sotto i sensi, assumerà il significato di un *intermediario fittizio fra gli oggetti reali* (cap. II).

La Dinamica estesa in tal modo potrà dirsi verificata se la corrispondenza stabilita fra gli enti fittizii e la realtà fisica condurrà ad una conoscenza adeguata dei varii rapporti fenomenici, ed in particolare ad una soddisfacente correzione delle previsioni sul movimento.

Ma una siffatta verifica resterà ad ogni modo subordinata all'accoglimento di altre ipotesi ausiliarie, poste a base della rappresentazione mercè cui si valutano le forze. Quale valore sia pertanto da attribuirle esamineremo nel capitolo VI.

Qui vogliamo concludere la nostra critica coll'osservazione seguente:

In una interpretazione estesa della Dinamica soltanto certe combinazioni dei dati elementari di questa assumeranno per definizione il significato di oggetti reali, e la verifica sperimentale porterà direttamente sui rapporti di tali oggetti, cioè su certi teoremi dedotti dai principii ipotetici, presumibilmente non equivalenti alle premesse. Onde si affaccerà naturale l'idea di prendere

i teoremi stessi al posto dei principii come supposizioni fondamentali di una teoria generalizzata.

Per tal modo l'interpretazione fisica degli sviluppi deduttivi della Meccanica, riuscirà a proseguire con una serie di induzioni successive il procedimento di acquisto dei concetti della Scienza, conformemente alle vedute illustrate nel cap. III.

Come essa possa riuscire di più ad una vera *correzione della Meccanica classica*, vedremo nel cap. VI.

CAPITOLO VI

ESTENSIONE DELLA MECCANICA

A - La fisica come estensione della Meccanica.

§ 1. Sviluppo della filosofia meccanica.

« *Spiegare e rappresentare come movimento, tutto ciò in cui si continua il fatto del movimento, e tutto ciò che lo precede* », tale è il problema posto dalla filosofia di DESCARTES, alla cui soluzione tendono in vario modo, da due secoli, gli sforzi dei più grandi teorici della Fisica.

Lasciamo per un momento da parte la veduta di ciò che caratterizza propriamente il pensiero cartesiano, in contrapposto ad altre tendenze affini, e consideriamo nel suo aspetto più generale il processo genetico dei concetti, che riesce alla costruzione della Meccanica, ed alla sua estensione progressiva nella Fisica.

Riconosciamo allora in codesto processo un duplice sviluppo:

1) uno sviluppo *interno*, che ha come idea direttrice la *riduzione* progressiva *dei dati primitivi* di senso, associati nei concetti;

2) uno sviluppo *esterno*, più particolarmente *estensivo*, che mira ad associare ai medesimi concetti una varietà sempre più larga di dati sensibili.

I termini dell'uno e dell'altro sviluppo sono stati fissati arditamente da Descartes, prima ancora che la Meccanica venisse costituita con NEWTON: per una parte la riduzione deve spingersi fino alla soppressione di ogni *differenza qualitativa* dei dati, toccare cioè ad una perfetta unificazione; d'altra parte l'estensione non deve incontrare alcun limite, l'intiero universo fisico deve trovare la sua adeguata spiegazione nella Meccanica!

Questo grandioso disegno metafisico rappresenta per così dire il quadro ideale, entro cui si muove il progresso della Scienza moderna.

L'enorme lavoro di due secoli ha recato certo alla Fisica notevoli acquisti.

Ma infine ne è uscita ai giorni nostri una conseguenza assolutamente imprevista da coloro che la promossero, cioè una critica nuova di quegli stessi principii già tenuti come verità indiscutibili e rigorose, una ricerca del signi-

CAPITOLO VI

ESTENSIONE DELLA MECCANICA

A - La fisica come estensione della Meccanica.

§ 1. Sviluppo della filosofia meccanica.

« *Spiegare e rappresentare come movimento, tutto ciò in cui si continua il fatto del movimento, e tutto ciò che lo precede* », tale è il problema posto dalla filosofia di DESCARTES, alla cui soluzione tendono in vario modo, da due secoli, gli sforzi dei più grandi teorici della Fisica.

Lasciamo per un momento da parte la veduta di ciò che caratterizza propriamente il pensiero cartesiano, in contrapposto ad altre tendenze affini, e consideriamo nel suo aspetto più generale il processo genetico dei concetti, che riesce alla costruzione della Meccanica, ed alla sua estensione progressiva nella Fisica.

Riconosciamo allora in codesto processo un duplice sviluppo:

1) uno sviluppo *interno*, che ha come idea direttrice la *riduzione* progressiva *dei dati primitivi* di senso, associati nei concetti;

2) uno sviluppo *esterno*, più particolarmente *estensivo*, che mira ad associare ai medesimi concetti una varietà sempre più larga di dati sensibili.

I termini dell'uno e dell'altro sviluppo sono stati fissati arditamente da Descartes, prima ancora che la Meccanica venisse costituita con NEWTON: per una parte la riduzione deve spingersi fino alla soppressione di ogni *differenza qualitativa* dei dati, toccare cioè ad una perfetta unificazione; d'altra parte l'estensione non deve incontrare alcun limite, l'intiero universo fisico deve trovare la sua adeguata spiegazione nella Meccanica!

Questo grandioso disegno metafisico rappresenta per così dire il quadro ideale, entro cui si muove il progresso della Scienza moderna.

L'enorme lavoro di due secoli ha recato certo alla Fisica notevoli acquisti.

Ma infine ne è uscita ai giorni nostri una conseguenza assolutamente imprevista da coloro che la promossero, cioè una critica nuova di quegli stessi principii già tenuti come verità indiscutibili e rigorose, una ricerca del signi-

ficato che ad essi può o deve essere attribuito affinchè risultino validi in un ordine più esteso di relazioni e finalmente una correzione propria della Dinamica newtoniana, che più recenti sviluppi additano come plausibile.

Tali sono le vedute caratteristiche del pensiero contemporaneo. Il quale, riconoscendo il valore progressivo della Scienza, respinge anzitutto come assurda la pretesa di conferire alla Meccanica un valore *assolutamente rigoroso ed universale*, sebbene non possa fissare un limite alla sua estensione e al correlativo perfezionamento dei suoi principii.

Il pensiero iniziale dirigente la filosofia cartesiana, deve essere anzitutto criticamente chiarito nella sua tendenza riduttrice delle differenze qualitative a rapporti di quantità.

§ 2. **Quantità e qualità : ipotesi cartesiana.**

Quare opium facit dormire?
Quia est in eo virtus dormitiva,
cuius est natura sensus assopire.

Questa celebre risposta del medico di MOLIÈRE, viene riferita spesso come tipo della *spiegazione* scolastica, la quale perderebbe invero ogni aspetto ridicolo, se si riducesse, come è nello spirito aristotelico, alla semplice constatazione *empirica* del fatto proposto, e non avesse la pretesa di aggiungervi qualcosa col creare il *nome* di una *qualità* corrispondente.

Contro alla veduta aristotelica si eleva il concetto cartesiano di una *spiegazione razionale*, basata sopra un supposto metafisico : al disotto delle varie *qualità*, che sono le apparenze del mondo fenomenico, c'è una *sostanza unica* suscettibile soltanto di *distinzioni quantitative*; la spiegazione dei fenomeni si riduce alla conoscenza dei rapporti di quantità ad essa inerenti.

Questo contrasto nel modo d'intendere la « spiegazione », viene illustrato dal DUHEM [1] sotto l'aspetto storico.

La nostra critica vuole mettere in luce altri aspetti della distinzione fra « quantità » e « qualità », una delle più delicate di cui il filosofo abbia ad occuparsi.

Quantità diconsi gli enti od oggetti di una *classe*, per cui sieno definite l'*eguaglianza* e la *somma*; conseguenza di codeste definizioni è la possibilità di stabilire fra tali oggetti un *rapporto* (*misura* dell'uno rispetto all'altro).

Dire che due enti, entro una data classe, sono uguali, significa che « si fa astrazione da certi loro caratteri differenziali, per raccogliere i caratteri similari in una unica rappresentazione astratta ».

[1] « L'évolution de la Mécanique ». Révue générale des Sciences, 1903, p. 63, 119, 171, 247, 301, 352.

Il senso proprio della somma è il « riunire » o « mettere insieme » l'uno « accanto » all'altro, o « dopo » l'altro, gli enti presi come parti o addendi; importa cioè la diretta associazione, nello spazio o nel tempo, dei gruppi di sensazioni che corrispondono alle parti sommate.

Riferiamoci a qualche esempio.

§ 3. **Esempii : i pesi.**

Le distanze, i volumi, i pesi, costituiscono altrettante classi di quantità. Esse vengono pensate come tali dopo che si sono acquisite le nozioni di « distanze uguali », « volumi uguali », « pesi uguali », in relazione a quella di « somma ».

Fermiamoci sull'esempio dei pesi.

Prendiamo una bilancia o una stadera, con un certo carico, e poniamo che il corpo A messo sul piatto faccia equilibrio al carico; sostituiamo ad A il corpo B, se l'equilibrio si mantiene diciamo che « i pesi di A e B sono *uguali, rispetto alla data bilancia* ».

Il significato di questa definizione è un'associazione ed una astrazione; distribuiamo i corpi in classi, ponendo in una medesima classe quelli che sono sostituibili l'uno all'altro rispetto ad uno stesso carico della bilancia o stadera, costruiamo quindi il concetto astratto del « peso relativo alla bilancia », concetto rispetto a cui ogni elemento della classe può essere surrogato da ogni altro. Le proprietà formali dell'eguaglianza (cap. III, § 14) rispecchiano codesto processo psicologico di astrazione.

Facciamo ora una seconda astrazione. Confrontiamo bilance o stadere diverse; « se due pesi sono uguali rispetto ad una di esse, sono pure uguali rispetto ad un'altra qualsiasi », si può dunque considerare l'uguaglianza dei pesi come una *relazione fra i corpi* paragonati, *indipendente* dal riferimento ad una particolare bilancia.

Procediamo a definire la « *somma* ». Somma dei due pesi A, B è il peso del corpo che si ottiene riunendo A e B, o di qualunque altro corpo di ugual peso sostituibile a codesta riunione.

« Dati A e C esiste sempre un peso B che sommato ad uno di essi, dà un peso eguale all'altro ».

Da ciò risulta che i pesi si possono considerare come quantità, somme di parti.

Non è però evidente a priori che « somme di pesi uguali sieno uguali ». Se infatti A ed A′, equilibrano ugualmente la bilancia con un dato carico. e così pure B e B′, non ne segue che A′ sia sostituibile ad A nella bilancia equilibrata che porta sul suo piatto A + B.

Ma, data la varietà di costruzione possibile, si riconosce che codesta sostituibilità è implicita nella indipendenza del peso dalla bilancia.

Abbiamo quindi le relazioni fondamentali che permettono di riguardare i pesi come una « classe di quantità ».

Si può pervenire alla definizione di codesta classe, in altri modi diversi, e la concordanza di essi implica la sussistenza di fatti che vengono generalmente supposti nel concetto del peso. Così, p. es., con una bilancia (è qui essenziale non si tratti di una stadera), si possono confrontare direttamente i pesi di due corpi A e B, ponendoli sui due piatti; la prima cosa da osservare è allora che « l'equilibrio permane quando si permutano A e B », quindi che « se A equilibra B e C, anche B e C si equilibrano fra loro », infine che « l'equilibrarsi di A, B è indipendente dalla particolare bilancia di riferimento ». Si hanno così le proprietà fondamentali inerenti alla « uguaglianza di peso ».

§ 4. **Quantità di calore.**

Un secondo esempio relativo alla definizione di classi di quantità è fornito dal calore.

Le « quantità di calore » cedute o acquistate da un corpo in una variazione di temperatura, si lasciano definire riferendosi alla massa di una data sostanza calorimetrica che varii in corrispondenza alla cessione o all'acquisto suddetto fra due temperature date (l'uguaglianza di temperature si suppone definita in base all'equilibrio termico, come diremo più avanti).

Questo modo di confronto conduce direttamente a fissare che cosa s' intende per quantità di calore « uguali » e per « somma di due quantità di calore ».

Si riesce così ad esprimere un processo di astrazione che suppone tre fatti fondamentali, analoghi a quelli riscontrati nel caso precedente: l'indipendenza della relazione definita dalla particolare sostanza calorimetrica di riferimento, la sostituibilità delle quantità di calore designate come uguali nel confronto calorimetrico (proprietà transitiva dell' uguaglianza, cap. III § 14), ed infine l'uguaglianza di somme di quantità uguali.

Il verificarsi dei fatti suaccennati costituisce la condizione essenziale per la possibilità del processo che ci conduce a definire delle quantità.

Perciò in molti casi codesto processo riesce impossibile. Il calore stesso ce ne porge esempio se si cerca di definire, non più la quantità di calore, ma *le temperature*.

In questo caso si ricorre ad un corpo di confronto, il termometro, prendendo sempre le mosse dal fenomeno del passaggio di calore fra corpi a contatto. Si definiscono in base all'equilibrio termico, le « temperature uguali », e la relazione riesce indipendente dal termometro, e soddisfa alle proprietà formali dell'uguaglianza.

Ma consideriamo ora la somma. Riunendo due corpi ugualmente caldi non si ottiene un corpo più caldo; la temperatura non varia.

Siamo perciò arrestati nel tentativo di considerare le temperature come quantità, somme di parti.

Per riuscire a codesto scopo occorrerebbe possedere non il concetto di « temperature uguali », ma quello di « aumenti uguali di temperatura ».

Si potrebbe allora considerare come somma di due aumenti, da A a B, e da B a C, l'aumento di temperatura per cui si passa da A a C, con una riunione di due passaggi successivi.

Ma se ogni termometro di riferimento permette di definire gli aumenti uguali di temperatura, questa definizione è strettamente relativa alla scelta della sostanza termometrica, giacchè « aumenti di temperatura che corrispondono a dilatazioni uguali di una data sostanza corrispondono a dilatazioni disuguali di un'altra ». E d'altra parte non vi è nell'aumento di temperatura alcun dato di sensazione che valga a discriminare la scelta di un certo gruppo di termometri.

§ 5. **Misura dell'intensivo.**

Ora che significato ha l'ipotesi metafisica che postula al disotto di ogni variazione fenomenica un sostrato quantitativo?

Poniamo, p. es., che il calore sia dovuto ad un fluido particolare contenuto nei corpi.

Per un osservatore dotato di sensi abbastanza sottili, il riscaldamento sarebbe dunque accompagnato dalla vista dell'aumento della quantità del fluido. Prendiamo il fenomeno del calore nella sua integrità complessa: impressione tattile e osservazione visiva; facendo astrazione dal primo ordine di sensazioni, riesciamo così a rappresentare le temperature come quantità proporzionali alle densità del fluido calorifico.

L'ipotesi del fluido calorifico ha dunque questo valore, d'indurci a ritenere come associato in modo *essenziale* alla temperatura un elemento quantitativo. È vero che il riconoscimento di questo non ci è consentito dalla ottusità dei nostri sensi, fortunata circostanza che ci vieta di mettere a cimento le ipotesi metafisiche; ma resta la fiducia che fra le varie associazioni possibili del fenomeno si possa discernere un gruppo di associazioni *notevoli*, nelle quali si scorga una indiretta constatazione del suo ipotetico sostrato. Di più la rappresentazione del fluido calorifico c'induce, come vedremo, a fare una scelta concreta.

Lo stesso ufficio adempie in generale l'ipotesi cartesiana per riguardo alla *misura dell'intensivo*.

In una serie fenomenica sia stabilito il senso dell'*uguale* e del *maggiore*, in guisa tale che si ottenga per astrazione una *serie di gradi di intensità*. Or bene questi gradi possono venire associati ai numeri o alle quantità crescenti di una classe; l'ipotesi cartesiana promuove una simile associazione, e in ogni sua espressione concreta la dirige in un senso non arbitrario.

Qui si deve riflettere che la fiducia di trovare una misura dell'intensivo, in rapporto ad un aspetto essenziale dei fenomeni, raggiunge intanto l'effetto di dar pregio all'uso di una misura.

Se anche le associazioni promosse non abbiano un significato reale particolarmente notevole, il fatto che esse conducano a misurare è già un resultato importante, che viene così apprezzato dal DUHEM (l. c., pag. 301):

« Cette extension de la notion de mesure, cet emploi du nombre comme symbole d'une chose qui n'est pas quantitative, eût sans doute étonné et scandalisé les péripatéticiens de l'Antiquité. Là est le progrès le plus certain, la conquête la plus durable que nous devions aux physiciens du XVIIe siècle et à leurs continuateurs;.... ils ont établi cette vérité, d'un prix inestimable : *Il est possible de discourir des qualités physiques dans le langage de l'Algèbre* ».

§ 6. **Misura naturale o assoluta: temperatura.**

Ma, come abbiam detto, l'ipotesi metafisica cartesiana non soltanto conduce ad una rappresentazione quantitativa, o misura dell'intensivo, bensì anche pretende di dirimere l'arbitrarietà pressochè illimitata delle associazioni capaci di fornirla, e vuol porgere quindi una misura privilegiata, *naturale o assoluta*.

Ritorniamo all'esempio della temperatura.

La misura essendo relativa al termometro resta definita a meno di una sostituzione

$$\tau = f(t),$$

dove f designa una funzione crescente arbitraria.

Orbene l'ipotesi del fluido calorifico, ci fa concepire l'idea di una misura *assoluta* delle temperature, ossia ci guida a ricercare « se alle variazioni che i corpi subiscono nel riscaldamento, si trovi associata qualche quantità, la quale non dipenda dalla qualità del corpo, e si accresca quindi ugualmente, fra temperature uguali, per corpi diversi ».

Invero se si assume codesta ipotesi rappresentativa, la quantità di calore Q contenuta da un corpo, sarà una quantità di fluido, proporzionale al volume occupato e alla densità t, e t rappresenterà la temperatura assoluta.

Quindi: l'ipotesi del fluido calorifico porta ad ammettere che le quantità di calore acquistate o cedute da corpi diversi nel passaggio da temperature uguali a temperature uguali, sieno proporzionali.

Questa conseguenza è lungi dall' essere verificata in generale, ma essa si verifica nel *caso limite* di trasformazioni reversibili (*adiabatiche*), per le quali la condizione della indistruttibilità del calore, supposta dalla ipotesi, trovasi realizzata.

E l'importante è questo, che la definizione positiva della *temperatura assoluta*, a cui si è condotti in rapporto alle trasformazioni reversibili, riesce affatto indipendente dall'ipotesi del fluido calorifico; essa permane come espressione di un fatto, comunque l'ipotesi suddetta si chiarisca inadeguata a spiegare la conversione del calore in lavoro meccanico, e la reciproca produzione del calore per mezzo dello sfregamento o della percussione dei corpi ecc.

Il fatto supposto nella definizione della temperatura assoluta può essere riconosciuto attraverso ipotesi rappresentative differenti; così, p. es., attraverso la *teoria cinetica dei gas* (cfr. § 10), dove si prenda come temperatura assoluta la forza viva media delle molecole gassose in movimento.

Le due rappresentazioni contengono ugualmente quel fatto in quanto esprimono certe associazioni di dati sensibili. Ma esse si ricoprono soltanto in parte, e la seconda rappresentazione dà qualcosa di più, cioè conduce a fissare lo *zero*; sicchè la temperatura resta definita a meno di un fattore dipendente dalla scelta dell'unità di misura, mentre dalla prima rappresentazione essa veniva determinata a meno di una sostituzione lineare

$$\tau = at + b.$$

Ed il significato di codesta scelta di uno zero assoluto è il riconoscimento di un *massimo* di quantità di calore (o di lavoro) che può fornire un gas.

Si avverta infine che il fatto fondamentale posto a base della definizione delle temperature assolute, si integra mercè la teoria cinetica, col riconoscimento che le quantità di calore acquisite o fornite dai varii gas, sono proporzionali fra loro (legge di JOULE) ed alle rispettive dilatazioni, donde un accordo dei termometri a gas, che tuttavia sussiste soltanto in quell'ordine di approssimazione in cui si applica la teoria cinetica nella sua forma più semplice.

§ 7. **Ricapitolazione e critica.**

Dalla discussione precedente possiamo raccogliere la seguente conclusione:

La rappresentazione di una serie di dati fenomenici come quantità, è il resultato di un certo processo di associazione ed astrazione, che suppone dei fatti.

Il successo del procedimento, per ogni cerchia di associazioni, è vincolato alla sussistenza dei fatti accennati. Ma, dove questi non sussistano, può

essere reso possibile allargando le associazioni stesse, cioè facendo corrispondere ai dati fenomenici altri dati quantitativi che nella realtà vi si colleghino.

Tuttavia la rappresentazione quantitativa così ottenuta rimane una convenzione *arbitraria*, fino a che non si determini un *gruppo di associazioni notevoli*, rispetto a cui la convenzione stessa abbia carattere *invariante*.

L'ipotesi metafisica esprime la fiducia generica di poter riconoscere simili invarianze (misure *naturali* o *assolute*), e ne promuove la ricerca tostochè si concreti in un appropriato *sistema di immagini*.

Ma vi è di più. L'ipotesi suddetta abilita a considerare i rapporti fenomenici cui si collegano le nostre aspettazioni, come esprimibili mediante *rapporti quantitativi* fra le misure (naturali) di certi dati; e le immagini adottate soccorrono a questa *traduzione analitica* della realtà fisica, sia guidandoci a riconoscere i nominati rapporti, sia agevolando la loro interpretazione. In ciò sta il valore dell'ipotesi metafisica relativamente al progresso della Scienza.

A dir vero abbiamo interpretato in tal modo la Metafisica della quantità, rilevandone il contenuto positivo. Codesta Metafisica ha di più la pretesa che le immagini corrispondano ad una *realtà inaccessibile ed universale*.

Essa ammette dunque anzitutto che le sue ipotesi abbiano valore di fatti, cioè implichino *sensazioni possibili per un osservatore dotato di sensi abbastanza sottili*; in secondo luogo che esse *possano* ricevere una espressione concreta atta a render conto di *tutti* i rapporti possibili fra gli ordini più varii di fenomeni.

La prima pretesa, a chi volesse prenderla in un senso positivo, limiterebbe enormemente la costruzione delle immagini; un esame comparato di quelle effettivamente costruite, mostra subito che codesti limiti non vengono punto rispettati; che le ipotesi suddette più che ingrandire snaturano le immaginarie sensazioni; che ragionando su di esse si è costretti ad inibire una serie di conseguenze contraddittorie, cui non si saprebbe sfuggire ove si attribuisse loro un contenuto di fatto (cfr. cap. I).

Ritenuto dunque che l'ipotesi metafisica rappresenti in ogni sua espressione concreta un *modello*, proprio a figurare un certo ordine di fenomeni reali, resta a vedere se sia concepibile che si raggiunga un modello unico, adeguato alla *realtà universale*.

L'assurdità di questa pretesa si rende manifesta a chi consideri i *modelli parziali* come resultato di associazioni ed astrazioni, giacchè un *modello universale* implicherebbe una estensione trascendente di tale processo psicologico.

Discendendo all'esame dei particolari vedremo ancor meglio come la costruzione di un modello stia sempre a rappresentare un parallelismo stabilito fra due serie fenomeniche, ed abbia quindi necessariamente un valore di riduzione *relativo* e *limitato*, in quanto nessuna serie può essere presa come assolutamente isolata da tutte le altre.

Altro ancora vi sarebbe da dire intorno alla *sostanza cartesiana*, priva di differenze qualitative. Ma se anche tali obiezioni non fossero note, che vale confutare un filosofo? Nulla di più facile, ma anche di più inutile, ha detto SCHOPENHAUER.

La metafisica della quantità, sebbene non possa essere accettata come tale, resta sempre l'idea direttrice di un secolare movimento scientifico, che abbiamo chiarito in senso positivo come un processo psicologico associativo. Importa perciò di vedere in qual modo essa si attui concretamente in una *Fisica considerata come estensione della Meccanica.*

Vogliamo dunque passare in rassegna gli sviluppi teorici che, attraverso una visione dinamica dei fenomeni fisici, tendono a fissare i *rapporti quantitativi* di taluni dati presi come caratteristici, e a riconoscere in questi rapporti la piena determinazione delle aspettazioni di fatto.

E ci proponiamo di rilevare e di spiegare:

1) la tendenza riduttrice dei dati primitivi della Meccanica, ed il suo significato psicologico;

2) in qual modo e fino a che punto, codesti sviluppi portino a confermare o a correggere i postulati della Meccanica;

3) il valore conoscitivo ed euristico dei modelli meccanici.

§ 8. **I due tipi di meccanismo: cartesiano e newtoniano.**

I dati della Meccanica sono qualitativamente varii: dati geometrici e cinematici *estensivi*; e dati dinamici *intensivi* (le forze). Lo sviluppo interno della filosofia meccanica tende alla loro riduzione progressiva.

Nell'indirizzo propriamente cartesiano si cerca di ridurre i dati intensivi agli estensivi, per cui la rappresentazione quantitativa si ottiene immediatamente, in rapporto alle sensazioni visive; in questo senso dunque si domanda una *spiegazione delle forze*. All'opposto il tipo newtoniano accoglie le forze, come azioni elementari tra le particelle dei corpi, nel numero dei dati primitivi, e cerca di unificarle e di sottomettervi la spiegazione di altri dati estensivi, in ispecie vuole *spiegare i legami* per mezzo delle forze.

I due tipi di meccanismo rappresentano una differenza di concezioni che può essere illustrato sotto diversi aspetti:

1) Il tipo della rappresentazione cartesiana è un *modello* esclusivamente *ottico*, il tipo newtoniano è un *modello* prevalentemente *tattile-muscolare* della realtà fisica.

2) Il tipo cartesiano corrisponde alla *fase associativa* del procedimento scientifico, il tipo newtoniano risponde piuttosto alla *fase astratta*. Quindi la rappresentazione quantitativa dei fenomeni è pei cartesiani un acquisto di cui si deve spiegare la *genesi*, e le associazioni visive ne porgono l' intuizione

chiara e *distinta*; invece la suddetta rappresentazione viene presa spesso dai newtoniani in una maggiore larghezza, come un dato *attuale* da utilizzare proseguendone le applicazioni.

3) Il tipo cartesiano risponde soprattutto allo *sviluppo interno* della filosofia meccanica, il newtoniano mira piuttosto al suo *sviluppo esterno*.

Infatti la tendenza cartesiana a polarizzare le rappresentazioni nel senso ottico deve essere interpretata soprattutto come uno sforzo verso l'associazione *più unificata* dei dati sensibili, imperocchè le immagini visive hanno generalmente un posto preminente nelle costruzioni psicologiche, e ad ogni modo non riescono eliminate dalla intuizione delle forze, del movimento ecc.

All'opposto la tendenza newtoniana ad un modello tattile-muscolare, che si sovrappone all'intuizione visiva in una costruzione astratta, deve essere riguardata soprattutto come uno sforzo verso l'associazione *più estesa* dei dati sensibili.

La prima tendenza ha dunque un prevalente valore *economico* rispetto alla scienza compiuta ed un valore *psicologico* di stimolo alla ricerca; la seconda risponde meglio agli uffici della *previsione* scientifica. Ma soprattutto il successo delle due tendenze si collega al loro alternarsi.

E così la Gnoseologia positiva compone il dissidio in una veduta superiore del processo scientifico!

Se si prende come scopo superiore l'associazione più unificata ed estesa dei varii dati sensibili, si riconoscerà infatti che lo alternarsi dei due sviluppi ha condotto più vicini a questo scopo.

Ai primi tentativi in senso cartesiano siamo debitori soprattutto della teoria cinetica dei gas; ma l'ulteriore sviluppo degli studii sull'elasticità (sia la ricerca di una rappresentazione più approssimata delle proprietà dei gas, sia in ispecie quella di una rappresentazione dei solidi e dei liquidi) si concreta in una spiegazione di tipo newtoniano. Questa si svolge complicandosi nella teoria meccanica del calore ed assorge alla forma più astratta della Meccanica energetica; dove tuttavia le vedute sulla localizzazione e sul moto dell'energia (connesse ai progressi delle teorie elettriche) vengono a riaffermare la tendenza opposta verso il modello cartesiano.

Un progresso della spiegazione meccanica nel senso cartesiano si riconosce invero più distinto nelle teorie ottico-elettro-magnetiche; la nozione dei legami si estende con MAXWELL, W. THOMSON, ecc.; l'immagine visiva dell'atomo acquista più largo ufficio nei recenti sviluppi; e tuttavia si riafferma l'indirizzo opposto in un modello elettrico della Dinamica.

Sebbene un così vario e vasto movimento di pensiero non faccia capo ad una conclusione unica, si può dire sinteticamente che gli accennati sviluppi hanno condotto per una parte ad *unificare le forze*, per l'altra ad *estendere*

i legami, e quindi si sono avvicinati in diverso modo ad un'associazione più unificata ed estesa dei dati sensibili.

Tali vedute risulteranno chiarite dall'esame degli sviluppi proseguiti nei varii campi della Fisica. Ma soprattutto quest'esame ci mostrerà come i molteplici acquisti parziali giustifichino un periodo critico della scienza, dove il difetto di verificazione sembra suscitare una nuova evoluzione induttiva della Meccanica.

§ 9. **Le forze ridotte ad urti: la gravitazione.**

I tentativi di *spiegare* la forza erano all'ordine del giorno nel secolo decimosettimo; sotto l'impulso di GASSENDI, DESCARTES, HUYGHENS si cercava di giustificare le proprietà dinamiche della materia, rievocando le antiche immagini di DEMOCRITO e di EPICURO: *corpuscoli* mobili, loro *urti*, *movimenti vorticosi* di liquidi circostanti.

Notiamo particolarmente, in quest'ordine d'idee, l'ipotesi che fa nascere la gravitazione universale dall'urto di *corpuscoli ultramondani*, sulla quale è basato un tentativo di spiegazione di FATIO DE DUILLIERS, rinnovato più tardi dal LESAGE.

Che significato ha una tale spiegazione della forza?

Osserviamo dei corpi elastici, che si muovono urtandosi fra loro. Appaiono tre momenti del fenomeno: moto, forza e moto. La forza, uscente dal campo della visione, che si presenta successivamente come « effetto » e come « causa », può essere idealmente soppressa da chi associ i due momenti del moto, riattaccandoli al fatto dell'urto descrittivamente considerato. Si ha così una successione d'immagini visive, il cui rapporto una volta conosciuto, permetterebbe di eliminare, e quindi in tal senso di spiegare, il dato « forza ».

La difficoltà nascerà appunto nel determinare codesto rapporto, senza rievocare l'immagine tattile-muscolare; chè se invece si ricorra a questa, attingendo le leggi elementari dell'urto alla considerazione delle forze elastiche, evidentemente il resultato raggiunto avrà soltanto un valore relativo di riduzione.

Nelle ipotesi di Fatio e di Lesage questa riduzione sarebbe significativa: la forza newtoniana, a distanza, verrebbe rappresentata come un effetto di forze elementari esercitantisi a contatto (conforme al progresso cui tende generalmente la rappresentazione della causa), ne risulterebbe in particolare una correzione alla teoria di NEWTON dipendente da « una velocità finita di propagazione della gravità », ipotesi che non si è concretata per altro, fino ad oggi, in accordo colle osservazioni dei moti planetari (cfr. cap. V, § 29), ma che, come vedremo, si riaffaccia ai giorni nostri in una nuova forma.

§ 10. **Teoria cinetica dei gas.**

DANIELE BERNOUILLI nel 1738, è ricorso similmente agli urti di particelle mobili per spiegare la pressione dei gas. Così è sorta la *teoria cinetica*

dei gas, ripresa dopo un secolo da KRÖNIG e da CLAUSIUS (1856-57) e condotta ad un più alto grado di perfezione da MAXWELL, BOLTZMANN, e VAN DER VAALS.

Nella rappresentazione primitiva di Bernouilli le particelle elementari del gas si movevano in linea retta fino all'incontro colla parete del recipiente, tutte con una medesima velocità uniforme, dalla quale scaturiva naturalmente una misura della temperatura. Questa veduta dovette esser corretta quando si volle tener conto degli urti fra molecole, che non possono essere trascurati ove si accordi a queste una dimensione non nulla. Per effetto di tali urti le velocità molecolari, se anche fossero supposte uguali in principio, debbono divenire varie entro larghi limiti, e tali quindi debbono ritenersi.

Si tratta allora di rappresentare gli effetti medii del fenomeno secondo le leggi della *probabilità*; in particolare la forza viva media fornirà la misura naturale (o assoluta) della temperatura, conformemente alla legge di JOULE.

Le conseguenze di queste premesse sono molto notevoli [1]. Se si prescinde dalle dimensioni molecolari, si ottengono come *prima approssimazione* le leggi dei gas espresse dalla formula

$$pv = RT$$

(p = pressione, v = volume specifico, T = temperatura, R = cost. per tutti i gas).

Sono le leggi di BOYLE, GAY-LUSSAC, AVOGADRO pei così detti *gas perfetti*.

Aggiungasi l'importante relazione fra i due calori specifici a volume costante e a pressione costante, (c_p, c_v) ed il peso molecolare (μ):

$$c_p - c_v = \frac{R}{\mu}.$$

Queste leggi non sono esattamente confermate dall'esperienza pei gas reali; gli scarti in vario senso, attinenti a varie condizioni, domandano di essere spiegati spingendo la teoria ad un *secondo ordine di approssimazione*; e, come Bernouilli ha previsto, si ottiene già una correzione tenendo conto delle dimensioni molecolari, ma questa è ben lungi dal soddisfare alle esigenze sperimentali. Evidentemente una correzione ulteriore deve essere cercata risalendo alla rappresentazione della molecola stessa, che si è assimilata ad una sfera elastica impenetrabile.

Questa immagine un po' grossolana dovrà essere modificata. In qual senso?

[1] Cfr. L. BOLTZMANN: « Vorlesungen über Gastheorie », Leipzig, 1896-98.

La molecola appare già, nei riguardi chimici, come un sistema meccanico complesso, tanto che certi fenomeni c'inducono ad ammetterne una dissociazione in ioni. Pertanto a perfezionare la teoria cinetica si ricorse all'ipotesi di un campo d'azione variabile colla temperatura, e di forze repulsive esercitantisi fra le molecole entro questo campo; si fissò anzi l'attenzione sopra una legge particolare $\left(\frac{1}{r^5}\right)$.

Questi sviluppi, ci allontanano, ognun lo vede, dal meccanismo cartesiano, che, secondo l'idea primitiva si presentava come atto a spiegare la forza originata dalla pressione di un gas; ma essi segnano un progresso estensivo della teoria nello studio delle proprietà dei gas, quantunque gli stessi fondatori si accordino nell'attribuire alle ipotesi adottate un carattere provvisorio.

§ 11. Teoria dell'elasticità : i solidi.

Supponiamo d'altronde che il meccanismo più semplice, fondato sull'ipotesi dell'urto di sfere elastiche, si mostrasse adatto a proseguire teoricamente lo studio delle proprietà gassose in accordo colle più precise esperienze.

Nondimeno la forza elastica dei gas non potrebbe allora ritenersi perfettamente *spiegata*, se non si accetti come data la nozione della *elasticità dei solidi*. Alla quale, come già avvertimmo, si deve necessariamente ricorrere per spiegare le leggi dell'urto, ove queste non vogliano riguardarsi astrattamente come un puro fatto ottico, prescindendo da un momento essenziale del fenomeno. Alla stessa nozione si fa capo ove si cerchi di rappresentarsi più generalmente la natura fisica dei *legami* riducendoli a forze fra i punti del corpo (cap. V § 24), e tentando in ispecie di spiegare in questo senso la rigidità approssimata dei corpi solidi, l'incompressibilità dei liquidi, e le reazioni elastiche che ne derivano.

Le difficoltà di formarsi una simile rappresentazione dello stato solido e liquido della materia, appariscono più grandi che nel caso dei gas.

Riassumiamo a larghi tratti la storia dell'argomento.

Ispiratosi alla concezione astronomica di NEWTON, e a talune vedute emesse da questo stesso autore intorno ai fenomeni di capillarità, BOSCOVICH (1763) ha ideato una generale rappresentazione della materia come un sistema meccanico costituito da *punti* dotati di massa, esercitanti gli uni sugli altri reciproche azioni e reazioni, uguali e contrarie, che, per ogni coppia di punti, sono dirette secondo la congiungente di essi e dipendono dalla loro distanza (*forze centrali*).

Siffatta teoria fu condotta innanzi, fino alla trattazione di problemi concreti, dalla scuola di LAPLACE. Questi in particolare portò ad un alto grado di compiutezza la spiegazione dei fenomeni di capillarità, trattati secondo lo stesso indirizzo newtoniano da varii predecessori.

E codesto indirizzo giunge con POISSON alla costruzione di una dottrina che, sotto il nome di *Meccanica fisica*, si contrappone alla *Meccanica analitica* di LAGRANGE, tentando di ridurre sistematicamente la nozione dei legami a quella delle forze.

Nel 1821 NAVIER, riattaccandosi alle vedute di Poisson, sottoponeva per primo ad una trattazione analitica i principii della teoria dell'elasticità dei solidi; i quali venivano poi sviluppati, secondo varie vedute, da CAUCHY, POISSON, GREEN e LAMÈ.

Importa di esaminare più da vicino le conclusioni di questi studii.

Immaginiamo di partire dalle ipotesi seguenti:

a) 1) i punti materiali costituenti un solido sono fissi nello stato d'equilibrio;

2) la distribuzione della materia è omogenea;

3) le forze interne risultano da azioni elementari fra le particelle del corpo e sono centrali.

Si possono allora scrivere le *equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici*, ed in queste figurano 15 coefficienti indipendenti. Se il corpo è *isotropo*, i coefficienti si riducono ad uno solo, ed in particolare si trova che il coefficiente di compressibilità cubica e quello di trazione stanno fra loro nel rapporto 3 : 2.

A queste conseguenze delle vedute di Navier e di Poisson si contrappongono i resultati della trattazione più generale secondo il principio dei lavori virtuali (cap. V, § 26).

Si ammetta che:

b) 1) i punti di un solido elastico sieno soggetti, oltrechè alle forze esterne applicate, e alle forze di massa, a *forze interne* sulla cui origine non si fa alcuna ipotesi;

2) il lavoro delle forze interne dipenda dalla deformazione dell'elemento di volume, e quindi, a prescindere da infinitesimi d'ordine superiore, si esprima con una forza quadratica per mezzo delle 6 componenti di deformazione, cioè delle variazioni dei lati e degli angoli di un parallelepipedo.

Allora il principio dei lavori virtuali conduce (con Green) ad equazioni dell'elasticità più generali, ove figurano 21 coefficienti indipendenti al posto di 15. Nel caso dei solidi isotropi si hanno *due* coefficienti indipendenti il cui rapporto può avere un valore qualsiasi.

Ora la maggiore generalità di questa seconda teoria corrisponde veramente a casi possibili; infatti mentre i coefficienti di elasticità dei metalli si accordano in una certa misura colle previsioni della prima teoria, il caso di un solido quasi-incompressibile come la gelatina vi sfugge.

Resta dunque a chiarire in qual modo le ipotesi *a*) debbano essere modificate.

A tale scopo si è proposta una modificazione dell'ipotesi 3), che ricorre anche in alcuni dei più autorevoli trattati recenti; essa consiste nell'ammettere che:

3) la forza agente sopra un punto materiale del solido dipenda *dall' insieme* delle particelle vicine, e non possa decomporsi in una resultante di azioni elementari; oppure

3'') le azioni elementari fra i punti del solido non sieno centrali.

Queste ipotesi contraddicono direttamente la Statica classica; la prima nega il principio della resultante, la seconda il principio statico di azione e reazione!

È naturale che si sia cercato di sfuggire ad una tale conclusione; Poisson ebbe già a tentarlo ricorrendo ad ipotesi sulla *forma* delle particelle atomiche, ma a dir vero tali considerazioni appaiono un po' artificiose.

W. THOMSON ha indicato una soluzione più soddisfacente, proponendo di modificare l'ipotesi *a*) 2) o la *a*) 1), e soprattutto quest'ultima.

Ammettere che i punti materiali di un solido in equilibrio siano effettivamente in moto, cioè che dove noi vediamo la quiete si tratti di *equilibrio statistico*, nel senso della teoria cinetica dei gas, è un modo di sciogliere la difficoltà che potrebbe sembrare ardito a priori, ma che riceve un conforto dalla teoria meccanica del calore.

Se accettiamo questa modificazione, le forze centrali esercitantisi fra i punti in moto non possono sostituirsi ad ogni momento, con forze parimente centrali esercitantisi fra le posizioni medie; in questo senso si spiegano le ipotesi 3') e 3'') come semplificazioni schematiche della rappresentazione.

Risulta dalla discussione precedente in qual modo l'ipotesi di un meccanismo newtoniano permetta di spiegare l'elasticità dei solidi, nello stesso senso che il principio dei lavori virtuali.

E ciò che abbiam detto pei solidi potrebbe ripetersi pei liquidi.

Tuttavia a questa *teoria cinetica della materia* si rimprovera di essere in generale poco feconda di conseguenze positive, benchè la rappresentazione che essa fornisce si riattacchi allo sviluppo della teoria meccanica del calore.

Verremo fra un momento a questo tema. Vogliamo ora esaminare una obiezione alla teoria generale dell'elasticità, che viene suscitata dall'esperienza.

§ 12. **Alterazioni permanenti.**

L'ipotesi fondamentale che permette di calcolare il lavoro delle forze interne di un solido elastico per una deformazione infinitesima, consiste nell'ammettere che esso dipenda per ogni elemento dalla deformazione *locale attuale*, e non da quella del rimanente solido, nè dalla serie delle *configurazioni precedenti* per cui il solido stesso può esser passato.

Una ovvia conseguenza di queste ipotesi è che cessando la forza defor-

mante il solido elastico deve riprendere il suo primitivo stato (*naturale*), ed in generale che le deformazioni elastiche subite non debbono modificare la sua elasticità.

Ora queste conclusioni sono direttamente contraddette dalle *alterazioni permanenti*, che per analogia coi fenomeni chiamati da EWING di *isteresi magnetica*, si denominano anche fenomeni di *isteresi elastica*. E si tratta di una contraddizione che investe le basi stesse della teoria meccanica dell'elasticità.

G. ROBIN nelle sue lezioni di Termodinamica generale insisteva sulla circostanza che i principii della Meccanica contengono una ipotesi di *non-eredità*, poichè si postula in essi che lo stato futuro del sistema dipenda dalle condizioni statiche *attuali*. Ed in alcune pagine suggestive del suo recentissimo libro su « La Science moderne et son état actuel » [1] E. PICARD sviluppa considerazioni interessanti sopra una Meccanica dove si abbia al contrario da tener conto della *eredità* : certe *equazioni funzionali* vi prenderebbero il posto delle *equazioni differenziali* classiche.

Le alterazioni elastiche permanenti, come in generale i varii fenomeni d'isteresi, sembrano richiedere una tale profonda modificazione.

Ma non è escluso che si tratti soltanto di casi d'*eredità apparente*.

Per far rientrare questi casi nella Meccanica classica, basta infatti ammettere che non si sia tenuto conto di *tutti* gli elementi notevoli determinanti il fenomeno, cioè basta considerare il sistema come *parte di un sistema più ampio*, cui si applichino i postulati meccanici.

Questo modo di risolvere la difficoltà darebbe luogo a molte riflessioni. Ma lasciamo da parte per il momento questi *casi aberranti*, salvo a riprenderli in considerazione più tardi, nelle conclusioni finali della nostra critica.

E dalla teoria cinetica della materia passiamo agli sviluppi termodinamici che vi si collegano.

§ 13. **Teoria meccanica del calore: conservazione dell'energia.**

Se, come già ammetteva DESCARTES, il calore è un movimento disordinato delle particelle elementari della materia, e il movimento si lascia spiegare mediante forze centrali, ci deve essere un *equivalente meccanico del calore*. Questa conseguenza è contenuta implicitamente nel principio delle forze vive (cap. V, § 28); essa precede di un secolo la scoperta della *conservazione dell'energia*.

Il merito di questa scoperta è conteso fra varii ricercatori, e alla questione di priorità si lega il problema, assai più interessante per il filosofo, di riconoscere i legami fra la speculazione teorica e la conquista sperimentale.

[1] Paris, Flammarion.

Ora, senza entrare in una disamina troppo minuta, diremo che:

La rappresentazione del *fluido calorifico* cui sono direttamente ispirate le prime ricerche calorimetriche di BLACK e di CRAWFORD, è da riguardare come il motivo fondamentale per cui il riconoscimento dell'equivalenza fra calore e lavoro ha tardato tanto a seguire il principio delle forze vive.

La suddetta rappresentazione è invalidata direttamente dalle esperienze di RUMFORD e DAVY, il quale nel 1812 veniva ricondotto a considerare il calore come una forma di movimento; tuttavia gli studii sulle macchine termiche intrapresi da SADI CARNOT nel 1824 ritengono sempre l'immagine del calorico indistruttibile. Soltanto alcuni anni più tardi Carnot rettificava queste vedute e giungeva a riconoscere un equivalente meccanico del calore; ma le sue note in proposito rimasero inedite, per quarant'anni ancora dopo la sua morte, avvenuta nel 1832.

Nel decennio che corre fra il 1830 e il 1840 diversi pensatori si avvicinano all'idea che il calore sia movimento, e ne traggono la veduta della permanenza di ciò che oggi si chiama *energia*; citiamo p. es. un lavoro di MOHR (1837) rivendicato da TAIT.

Da ciò risulta che la rappresentazione meccanica del calore deve riconoscersi più o meno esplicitamente quale idea direttiva nella ricerca di una equivalenza fra calore e lavoro, e quindi deve essere ritenuta preparatrice della scoperta che si riattacca ai nomi di MAYER (1842) JOULE e COLDING (1843).

Senza discutere i meriti rispettivi di questi tre scopritori, basta infatti constatare che, qualunque fossero le loro vedute personali, essi trovavansi di fronte ad una *questione già posta*; appunto nell'aver posto la questione si ravvisa l'influenza della teoria sulla conquista sperimentale, cioè il valore euristico del modello che fa del calore una forma di movimento.

Contro questa tesi invano si addurebbero le opinioni personali del Mayer che rifiuta tale concezione meccanica; tanto più che nella ricerca del Mayer stesso si scorge già postulata a priori la permanenza di un *quid* comune al calore e al lavoro, e, senza dimostrare questo fatto, si ottiene la determinazione numerica dell'equivalente termodinamico dal confronto dei calori specifici dell'aria.

Il rapporto del principio di equivalenza colla teoria meccanica del calore appare nettamente compreso da Joule e da Colding; e rifulge di luce più viva nei lavori di HELMHOLTZ (1847). Se si considera ogni sistema isolato come un meccanismo newtoniano, per modo che esista un potenziale o una energia potenziale (la cui variazione locale misura la forza), vi è luogo a considerare la *enegia totale* del sistema, cioè la somma della suddetta energia potenziale e della energia cinetica o forza viva, come decomposta in diverse *energie* aventi un proprio significato fisico: in una energia meccanica apparente (cinetica e potenziale), in una energia termica o quantità di calore, ed in generale anche

in altre energie (elettrica, fotica ecc.). La somma delle varie energie nominate si mantiene costante.

Questo è il principio generale della *conservazione dell'energia*, che abbraccia in particolare l'equivalenza termo-dinamica.

Rileviamo esplicitamente che il principio della conservazione dell'energia deve essere oggi ritenuto come un *principio sperimentale*, indipendentemente dall'ipotesi delle forze centrali.

Tale affermazione non contraddice al legame riconosciuto fra l'ipotesi e il principio. Questo è una conseguenza di quella, ma non viceversa. Quindi se varie e concordanti esperienze verificano direttamente la conservazione dell'energia, si viene a porre la validità del principio stesso sopra una nuova base, mentre l'ipotesi iniziale che suggerì la scoperta riceve soltanto una conferma indiretta ed incompleta.

Ora la concorde fiducia nel principio dell'energia riposa sopra due ordini di prove:

1) le esperienze dirette di Joule, di HIRN ecc. nelle quali si ritrova l'equivalente meccanico del calore attraverso le più varie trasformazioni di energia;

2) la prova indiretta di Helmholtz, che ha dedotto il principio della conservazione dell'energia dalla *impossibilità del moto perpetuo*, ritenendo questa impossibilità messa in luce da un esame critico dei tentativi infruttosi che si riferiscono al nominato problema.

§ 14. **Secondo principio della Termodinamica.**

Il secondo principio della Termodinamica non trae affatto la sua origine da rappresentazioni meccaniche del calore, ma è suggerito dall'analogia della « caduta di calore » col moto di un fluido; vedremo anzi le difficoltà che si incontrano per conciliarlo col meccanismo.

La scoperta si riattacca agli studi SADI CARNOT sulle macchine termiche; occorse soltanto rettificare i resultati ottenuti da questi nell'ipotesi del fluido calorifico, mettendoli in armonia col principio dell'equivalenza fra calore e lavoro; ciò fece CLAUSIUS nel 1850.

Il postulato fondamentale di Clausius è che « il calore non può passare da un corpo più freddo ad uno più caldo, senza impiego di lavoro e senza che contemporaneamente altro calore passi da un terzo corpo ad un quarto a temperatura più bassa ». Da questo postulato si deduce un principio equivalente, che esprime l'impossibilità del così detto *moto perpetuo di seconda specie*, cioè « non è possibile trasformare calore in lavoro, togliendo calore da una sola sorgente a temperatura uniforme ».

Combinando tale principio con quello dell'equivalenza, si perviene al *teorema di* CARNOT-CLAUSIUS, che enunciamo nella sua forma più generale

relativa ai cicli reversibili, tralasciando alcune restrizioni di secondaria importanza di cui si fa uso nella sua dimostrazione.

Si abbia un sistema di corpi che, dopo un ciclo chiuso di trasformazioni reversibili, ritorni allo stato iniziale: si calcolino, lungo la linea di trasformazione s, la quantità di calore Q e la temperatura (assoluta) T del sistema, si ha allora

$$\int_s \frac{dQ}{T} = 0 \text{ (1)}.$$

Per conseguenza se per un ciclo aperto di trasformazioni reversibili si valuta l'integrale di Clausius $s = \int \frac{dQ}{T}$, si ottiene una quantità dipendente soltanto dallo stato del sistema e non dalla serie delle trasformazioni eseguite. Questa quantità prende il nome di *entropia*.

Il teorema di Carnot-Clausius può assumersi come secondo principio della Termodinamica, e si tratta ora di vedere in qual modo si riesca a fornirne una spiegazione meccanica.

Facciamo l'ipotesi che il calore sia l'espressione sensibile di *movimenti interni* (invisibili) delle molecole. Nelle trasformazioni termodinamiche di un corpo vedremo allora un sistema meccanico pel quale si distingueranno due parti componenti l'energia totale:

1) l'energia *interna*, rappresentante la *quantità di calore* Q;

2) l'energia cinetica *esterna* o *apparente*, dovuta al movimento visibile del sistema.

Ma questa seconda energia si potrà ritenere trascurabile di fronte alla prima, se ci si limiti a considerare *trasformazioni lente*, ove le velocità del moto visibile sono piccolissime rispetto alle velocità molecolari.

Per interpretare meccanicamente il secondo principio della Termodinamica occorrerà dunque assegnare l'espressione dinamica di una quantità rappresentante la temperatura T, che per ogni trasformazione elementare sia un divisore integrante della variazione dQ.

Inoltre se conformemente al punto di vista della teoria cinetica dei gas, si considera l'equilibrio termico come un *equilibrio statistico*, deve essere verificata la proprietà fondamentale della temperatura, cioè unendo due sistemi in equilibrio statistico corrispondenti allo stesso valore di T, si deve ottenere un sistema parimente in equilibrio statistico, cui corrisponda il medesimo T.

La rappresentazione dei gas che vien portata dalla teoria cinetica (§ 10)

(1) Se la temperatura non è uniforme occorre separare il sistema in tante parti elementari e considerare la somma degli integrali di Clausius. Cfr. POINCARÈ: « Thermodynamique » Carrè, Paris, 1892 (pag. 224).

conduce tosto alla definizione della temperatura (assoluta) T in guisa da soddisfare alle condizioni enunciate; ciò è conseguenza del fatto che l'ipotesi cinetica contiene le *leggi dei gas perfetti*.

La rappresentazione meccanica dei liquidi e dei solidi si accorda meno facilmente col secondo principio della Termodinamica.

I principali tentativi per costruire un meccanismo atto a simulare questi corpi, sono dovuti a BOLTZMANN (1866), CLAUSIUS (1871), H. HELMHOLTZ [1] (1884) e J. W. GIBBS [2] (1902).

Questi tentativi, in ispecie quelli più notevoli dei due ultimi autori citati, lasciano intravedere la possibilità della desiderata spiegazione meccanica, sebbene non porgano al problema una risposta intieramente soddisfacente.

Nei meccanismi costruiti da Helmholtz (*sistemi monociclici*, ove hanno luogo dei moti nascosti a regime permanente, p. es. moti vorticosi o vibratorii) si riesce a definire T, come proporzionale all'energia cinetica molecolare media, in guisa che sia per ogni trasformazione elementare un divisore integrante della variazione dQ, ma non si vede bene come sia soddisfatta da T la seconda proprietà fondamentale sopra ricordata.

Gibbs si è preoccupato prima di tutto di rispondere a questa condizione e vi è riuscito sotto ipotesi generalissime, considerando sistemi composti in un immenso numero di elementi (corpi) svariatissimi. Disgraziatamente questi sistemi si allontanano dal tipo del meccanismo newtoniano, poichè si considerano forze emananti da centri fissi, in luogo di azioni reciproche delle parti in movimento.

Pei sistemi di Gibbs, soddisfatta una particolare condizione (*distribuzione canonica*), si può dunque definire una certa quantità (*modulo di distribuzione*) T, che gode della proprietà fondamentale suindicata: affinchè la riunione dei due sistemi a distribuzione canonica in equilibrio statistico, dia luogo ad un sistema canonico in equilibrio statistico, è necessario e sufficiente che i due sistemi dati abbiano lo stesso modulo di distribuzione. Però le equazioni di equilibrio statistico pei sistemi di Gibbs, non concordano esattamente con quelle della Termodinamica; vi è uno scarto, il quale tuttavia tende a ridursi col crescere del numero dei parametri da cui dipende la determinazione di ciascun elemento del sistema, sicchè *le leggi termodinamiche appariscono qui come limite delle meccaniche*.

§ 15. **Fenomeni irreversibili.**

Sarebbe arrischiato di voler trarre da questo resultato una conclusione qualsiasi. Evidentemente i sistemi immaginati da GIBBS non costituiscono la

[1] « Wissenschaftlische Abhandlungen », Bd. III, pag. 176. Cfr. H. POINCARÈ: « Thermodynamique », pag. 392.

[2] « Elementary Principles in Statistical Mechanics », New-Jork e Londra. Cfr. T. DUHEM, l. c.

sola possibile illustrazione meccanica delle leggi termodinamiche. Non sembra dunque escluso che, anche senza uscire dal tipo di meccanismo newtoniano, si possa giungere alla costruzione di un modello meccanico assai generale, che soddisfi rigorosamente alle condizioni desiderate.

Ma vi è un altro aspetto del problema che deve richiamare la nostra attenzione.

Noi abbiamo considerato fino ad ora soltanto fenomeni termodinamici reversibili; ora questo è soltanto un caso limite del caso generale in cui si hanno fenomeni irreversibili, pei quali il teorema di CARNOT-CLAUSIUS deve essere modificato, sostituendo una diseguaglianza all'eguaglianza considerata di sopra. Se allora si definisce anche in questo caso la variazione d'entropia [1], si giunge al resultato seguente:

In ogni trasformazione irreversibile di un sistema isolato, la entropia va continuamente crescendo.

Una medesima tendenza sembra dunque sollecitare i fenomeni della natura in un senso determinato.

Come può accordarsi questo colla rappresentazione meccanica?

Una delle conseguenze più ovvie della forma propria alle equazioni di LAGRANGE è la reversibilità dei movimenti: dunque ogni meccanismo, in quanto è retto da tali equazioni conformemente ai principii della Dinamica, non può offrirci esempio di fenomeni irreversibili.

La difficoltà sembra a prima vista inestricabile. Nondimeno due spiegazioni sono state proposte per dirimere il paradosso.

HELMHOLTZ osserva che la reversibilità appartiene soltanto ai sistemi meccanici *completi*; pei sistemi *incompleti* si può avere un'apparente irreversibilità. Così accade p. es. pel pendolo di FOUCAULT, a cagione dei movimenti della terra che completano il sistema.

Ora dunque si può ammettere che i fenomeni irreversibili, datici dall'esperienza, sieno soltanto una parte visibile di fenomeni completi in cui entrano *movimenti nascosti*; l'irreversibilità costituirebbe così l'apparenza dei fatti che nella loro integrità sarebbero reversibili.

Non bisogna illudersi sulla portata di una tale spiegazione. Il DUHEM giustamente osserva che essa rende conto dell'esistenza di processi irreversibili, ma non ci dice perchè questi obbediscano tutti ad una comune tendenza, perchè accanto ai sistemi apparentemente isolati ove l'entropia va crescendo non se ne trovino di quelli per cui avviene l'opposto.

Assai più soddisfacente è la spiegazione della irreversibiltà proposta dai fondatori della teoria cinetica dei gas.

Consideriamo un sistema composto di un immenso numero di elementi moventisi in tutti i modi possibili, p. es. quello che abbiamo indicato come

[1] Cfr. POINCARÈ, op. cit., pag. 229.

modello di un gas; una trasformazione del sistema corrisponde al passaggio da uno stato ad un altro, ogni stato essendo definito dalle velocità degli elementi in grandezza e direzione.

Mancando una conoscenza precisa del processo, è impossibile dire quale sarà la trasformazione del sistema dopo un tempo t. Ma nell'insieme di tutte le trasformazioni possibili appariscono come *più probabili* quelle che ci avvicinano ad una distribuzione delle velocità indicata da MAXWELL, per cui diventa massima una certa funzione H (che avrà così l'ufficio dell'entropia), corrispondente ad uno stato di piena *disorganizzazione* del sistema.

È lecito dunque affermare che dopo un tempo t sufficientemente grande, la trasformazione del sistema avverrà molto probabilmente nel senso dell'accrescimento di H. È vero che una siffatta trasformazione sarebbe sempre teoricamente invertibile; ma la trasformazione inversa non dovrà riguardarsi come ugualmente probabile alla data, giacchè la continuazione di essa per un valore più grande di t, ci condurrebbe probabilmente ad uno stato disorganizzato pel quale H avrebbe un valore più grande.

Fermiamoci sui punti delicati di questo ragionamento.

Quantunque le trasformazioni possibili del nostro sistema si presentino a coppie, stando accanto a ciascuna l'inversa, non ne segue perciò che ognuna di esse sia ugualmente probabile come l'inversa; questa conseguenza sarebbe legittima soltanto se le trasformazioni suddette fossero in numero finito, mentre esse sono infinite. L'irreversibilità appare così come un effetto di media, in una serie di fenomeni individualmente reversibili. Per questo lato nulla vi è da obiettare.

Si rilevi però il carattere della spiegazione ottenuta; essa aggiunge alla rappresentazione meccanica il principio sperimentale che vuole verificata in un gran numero di casi la legge della probabilità.

Tale principio suppone d'altronde una eguaglianza di condizioni nello svolgersi dei fenomeni elementari sovrapposti di cui si cerca l'effetto di media.

Ora chi ci assicura che una disposizione primitiva del nostro meccanismo non potrebbe alterare codesta eguaglianza e rendere quindi inapplicabile la legge suddetta? Il BOLTZMANN (op. c.) conviene in questo punto che la teoria si fonda sopra un'ipotesi; crediamo che una più precisa determinazione di essa possa essere desiderata.

Non si può negare ad ogni modo il valore di una spiegazione che si dimostra atta ad approfondire lo studio di casi concreti, costruendo, p. es. una teoria cinetica della diffusione dei gas, ed illustrando così meccanicamente un fenomeno irreversibile.

D'altronde non è neppure il caso di lagnarsi che la teoria meccanica delle trasformazioni irreversibili lasci intravedere come possibile, in particolari condizioni, un rovesciamento del corso naturale dei fenomeni, in contraddizione

al secondo principio della Termodinamica. Chi ci assicura che il postulato di CLAUSIUS non possa subire qualche eccezione? p. es. nei fenomeni della vita?

Ricorre qui spontanea al ricordo la concezione del *demone* di MAXWELL, distributore dell'energia. Scegliendo in un gas le molecole dotate di maggior velocità e separandole dalle altre, il demone potrebbe elevare la temperatura di una parte di esso a detrimento dell'altra, senza fornire alcun lavoro.

Ma un tale fenomeno sembra esigere necessariamente una *forza di scelta*.

Respingendo l'uso di un tal mezzo, G. LIPPMANN [1] ha proposto una esperienza ideale per cui nelle ipotesi della teoria cinetica si riuscirebbe a toglier calore da un gas a temperatura uniforme, collocato in un campo magnetico, contraddicendo così al postulato di Clausius. Si tratta di approfittare delle correnti indotte alternate che si generano pel moto delle cariche elettriche portate dalle molecole, tenendo conto delle piccole differenze nella distribuzione delle velocità.

A vero dire questi effetti non potrebbero rendersi sensibili, e perciò non costituirebbero una effettiva contraddizione al principio termodinamico, preso nella sua accezione reale, come un fatto d'esperienza. Ma, se non c'inganniamo, si può opporre al ragionamento del Lippmann un'altra osservazione: un gas a temperatura *uniforme* ammette sempre, nelle ipotesi della teoria cinetica, piccolissime differenze di temperatura in punti diversi; sembra dunque che tali differenze, riducendosi progressivamente, possano essere utilizzate come una infinitesima caduta di calore per produrre effetti del medesimo ordine, conformemente al secondo principio della Termodinamica.

§ 16. **Meccanica energetica.**

Consideriamo gli sviluppi precedenti sull'elasticità e sul calore come un tentativo di verificare più estesamente la Meccanica newtoniana.

La possibilità della verifica resta subordinata all'ipotesi di *movimenti nascosti*; la quale ipotesi vedremo assumere un'estensione maggiore nelle teorie elettro-magnetiche, dove si postuleranno anche *masse nascoste*.

Ora questa costruzione ipotetica di un mondo invisibile, paragonata ai fatti d'esperienza ch'essa vuole spiegare come conseguenze dei principii adottati, viene a contenere un'arbitrarietà tanto più illimitata, in quanto che i fenomeni irreversibili ci costringono a moltiplicare i movimenti nascosti, e a ritenerne soltanto gli *effetti di media* secondo la legge dei grandi numeri.

Riguardata sotto questo aspetto la Fisica assume un carattere di *limite* per riguardo alla Meccanica, e la verifica di questa viene in definitiva a mancare, poichè si apre l'adito a *possibili modificazioni dei principii meccanici*, che sieno di natura da essere eliminate in un computo di media.

[1] Rapports du Congrès international de Physique. Paris, 1900, tom. I.

La conclusione precedente si può esprimere dicendo che la spiegazione meccanica dei fenomeni fisici, contiene delle *ipotesi indifferenti* rispetto alle conseguenze che costituiscono i principii generali dei fenomeni stessi.

Dalla tendenza ad *eliminare l'indifferente* rimane quindi giustificato un ulteriore sviluppo induttivo della Dinamica, dove i principii suddetti vengono presi come premesse più generali al posto dei principii newtoniani. Questo sviluppo riscontriamo appunto nella costruzione di una *Meccanica energetica*, a cui HELMHOLTZ ha dato origine.

Supponiamo di partire da un meccanismo newtoniano, cioè da un sistema di punti in moto fra cui intercedano forze centrali. Restano allora definite una *energia potenziale* ed una *energia cinetica*, che, secondo le varie rappresentazioni meccaniche, assumono un significato fisico diretto traducendosi in quantità misurabili; e si possono porre i due postulati fondamentali seguenti:

1) La somma delle due energie in ogni sistema isolato è costante (*conservazione dell'energia*).

2) La variazione avviene in modo che la *media* delle differenze fra l'una e l'altra energia, in ogni intervallo di tempo, sia minima (*principio di* HAMILTON).

La maggior estensione di questi postulati in confronto alla Meccanica classica, risulta dalle osservazioni seguenti:

a) Ogni ordine di fenomeni per cui sia possibile definire due specie d'energia, distinte come cinetica e potenziale, in guisa che sieno soddisfatte le condizioni 1) 2), ammette *una e quindi anche infinite spiegazioni meccaniche* (POINCARÈ).

b) Una spiegazione energetica di un ordine di fenomeni, si può anche far corrispondere ad un ipotetico meccanismo per cui non valgano i fondamentali principii dinamici.

Tuttavia importa mettere in vista che una spiegazione meccanica, conforme alla Dinamica classica, si può ritenere come una spiegazione energetica, *soltanto sotto la condizione* che le forze ammettano un potenziale, cioè che valga il principio delle forze vive (cap. V § 28).

L'Energetica è dunque una Meccanica più generale, soltanto se si ritenga escluso il caso di forze senza potenziale. Il qual caso, dove i fenomeni non obbediscono alla conservazione dell'energia, può essere considerato come un artificio volto ad isolare una Meccanica ristretta di sistemi incompleti, e a surrogare in questa ciò che è dovuto a forme d'energia non propriamente meccaniche.

§ 17. **Materia ed energia.**

La Meccanica energetica come la classica si urta nella difficoltà di spiegare i fenomeni irreversibili, e se vuole eliminare le considerazioni di media e di limite è costretta ad ammettere *forme d'energia qualitativamente diverse,*

e ad accogliere quindi nuovi postulati sulla trasformazione di queste. Appunto in tal senso procedono, con intedimenti utilitarii, certi nuovi sviluppi nel campo della Fisica-chimica [1].

Non è nostro proposito di farne l'esame.

Vogliamo invece raffrontare qui, sotto varii aspetti, le concezioni fondamentali della Meccanica energetica e della Meccanica classica.

Abbiamo già rilevato (cap. V § 20) che la critica delle circostanze determinanti del moto tende a distinguere :

1) i caratteri *interni* dal corpo mobile, a cui si riferiscono le rappresentazioni conducenti al concetto della *massa*;

2) le relazioni *esterne*, cioè il campo di *forze* entro cui il corpo si muove.

Le locuzioni « interno » ed « esterno » hanno qui un significato relativo. Sono presi come elementi interni i dati forniti da esperienze *sul corpo*, dove intervengono bensì *altri corpi* (istrumenti ecc.), ma che restano indipendenti dal movimento di cui è proposta la determinazione, cioè che possono effettuarsi sul corpo, a volontà, p. es. in condizioni di quiete. Sono presi invece come dati esterni al corpo mobile quelle condizioni di cui si può constatare l'azione portando entro il campo un altro corpo qualsiasi (a parità di massa); ed è per astrazione che questi dati, indipendenti in una certa misura dal corpo mobile, si considerano come esterni ad esso.

Ora abbiamo già avuto occasione di notare che la distinzione schematica suaccennata corrisponde imperfettamente alla realtà, quando si riguardino i fatti conosciuti nella loro più vasta estensione. Infatti da una parte il confronto delle masse di corpi chimicamente irriducibili ci conduce ad esperienze di movimento, ove entrano, almeno implicite, le forze. D'altra parte i campi di forze newtoniani ci mostrano già una dipendenza della forza, che si vuol prendere come dato esterno, dalla massa su cui essa agisce; ed i fenomeni elettrici ecc. c'indicano di più una dipendenza delle forze stesse dallo stato fisico del corpo mobile, cioè da caratteri di esso che, in una prima intuizione almeno, si presentano come interni.

Lo sviluppo di simili considerazioni induce naturalmente a ritenere fittizia la distinzione rappresentativa fra caratteri o rapporti interni ed esterni di un corpo, *presa in un senso generale*.

Questa critica investe la stessa idea che ci formiamo della *materia*, a cui si riattacca la distinzione precedente.

Si dovrà dunque intendere che l'attribuire certe proprietà *ad una materia*, significa riconoscere l'associazione di certi dati fenomenici che vien fatta corrispondere astrattamente ad un oggetto, il *corpo materiale*, soprattutto perchè

[1] Cfr. DUHEM, l. c.

vi si connette una certa *localizzazione* e quindi una *disponibilità* dei fenomeni stessi; speciale importanza sotto tale riguardo hanno i corpi *solidi*, che fungono anche da recipienti per i *liquidi* e per i *gas*.

Ora la disponibilità della materia corrisponde ad una serie di *invarianti* sovrapposti, relativi a gruppi di trasformazioni fisico-chimiche; la *massa* è uno di questi invarianti, relativo al gruppo di tutte le trasformazioni suddette; certi campi di *forze* che riattacchiamo ad un corpo, p. es. le attrazioni newtoniane, hanno pure un senso relativamente invariante. E queste invarianze si esprimono dicendo che per un corpo *isolato* la massa è costante ecc., dove l'isolamento è un'ipotesi fittizia che rende un'astrazione in forma semplificata.

Accanto agli invarianti suddetti, ed anzi più generale di essi, si presenta l'*energia*, cioè la somma delle varie energie, di un *sistema isolato*.

Il significato dell'energia stessa può essere definito, in virtù delle varie trasformazioni possibili, riducendosi per equivalenza ad una forma determinata, sia p. es. ad un *lavoro*, che corrisponde allora direttamente ad un determinato gruppo di sensazioni tattili-muscolari, e può essere apprezzato più precisamente mediante opportuni istrumenti.

Ora la scuola che ha trovato in OSTWALD il suo teorizzatore muove dalla veduta fondamentale che l'energia possa essere riguardata come un *oggetto* al pari della materia, che anzi questa debba essere ritenuta come una *forma particolare di energia*.

La tesi ha sollevato alte grida. Si è parlato di *immaterialità della materia* e di *materializzazione dell'energia*, come se sotto queste parole si nascondesse un *fatto* di capitale importanza, e si è invocato il *senso comune*; prudente salvaguardia per chi vuol risparmiarsi la critica delle espressioni scientifiche!

Il vero è che le espressioni sopra riferite non coprono alcun dubbio di fatto, e che la veduta energetica non vuol per nulla *cambiare la realtà*, ma soltanto modificare *le immagini* che ce ne formiamo, o meglio le immagini che ricorrono nello studio astratto dei rapporti fisici, imperocchè le intuizioni della materia non vengono certo bandite dalla interpretazione concreta della teoria.

La critica del concetto di materia che sta a base della veduta energetica, e la concezione dell'energia come di un « oggetto », non possono dar luogo ad alcuna giustificata obiezione. Ma si può discutere soltanto circa il valore di queste immagini in confronto a quelle suggerite dall'idea della materia, ed in particolare alle immagini *atomiche*.

Gli energisti ritengono assorbite nel concetto della energia tutti gl'invarianti parziali connessi alla materia, ed in ispecie la invarianza della massa. Essi respingono d'altra parte ogni rappresentazione atomistica.

Queste vedute non ci appariscono sufficientemente giustificate; ed è notevole che mentre la teoria atomica conserva un ufficio importante nella Chi-

mica, rappresentazioni analoghe vengano portate con frutto nei nuovi studii sull'elettro-magnetismo.

§ 18. **Localizzazione e movimento dell'energia.**

Vi sono d'altronde due modi di rappresentazione energetica dei fenomeni.

Il primo, che risponde a scopi utilitari parziali (soprattutto nella recente Fisico-chimica), tende a prescindere dagli elementi visivi che si connettono ai *rapporti locali*, prosegue insomma e conclude ad una più alta astrattezza il tipo del modello meccanico newtoniano.

Ma di contro a questo sorge un diverso sviluppo nel senso cartesiano, che può dirsi rappresentato dalle teorie sulla *localizzazione e sul movimento dell'energia*.

Qui l'energia viene per così dire materializzata, poichè la si assimila ad un fluido diversamente denso nelle varie regioni dello spazio, e la spiegazione dei fenomeni è ridotta a descrivere il moto di codesto fluido.

Queste immagini scaturiscono dalla teoria dell'elettricità (cfr. § 21). MAXWELL dapprima ha localizzata l'energia elettrica nei dielettrici, e POYNTING ha rilevato la semplicità con cui questa si muove: a meno di una deformazione che non altera i volumi, il flusso è normale al piano delle forze elettrica e magnetica, e proporzionale all'area del loro parallelogramma.

Più recentemente il VOLTERRA ha proposto un modo di localizzare l'energia newtoniana ed elastica, e ne ha descritto il moto. Un vero modello ottico delle *migrazioni dell'energia*.

Di questi resultati speculativamente belli non si potrebbe apprezzare oggi il valore positivo.

Essi ci forniscono però una intuizione più sintetica delle discriminazioni fra proprietà interne ed esterne della materia. E relativamente alle nostre considerazioni hanno questo interesse: mostrano come il dualismo tra l'indirizzo cartesiano ed il newtoniano, che abbiamo riattaccato al contenuto sensibile delle immagini, si prosegua ancora nello sviluppo dei concetti energetici.

§ 19. **Spiegazione elastica dei fenomeni ottici ed elettromagnetici.**

Accanto agli sviluppi della Meccanica, nelle teorie generali della elasticità e del calore, sono da noverare quelli concernenti la luce, l'elettricità e il magnetismo. Dei quali vogliamo ora brevemente discorrere.

Anzitutto due sono i punti di riattacco di quest'ordine di fenomeni fisici al concetto generale della elasticità:

1) La rappresentazione della luce come vibrazione di un mezzo elastico (*teoria delle ondulazioni di* FRESNEL);

2) La rappresentazione di MAXWELL che fa del dielettrico interposto fra corpi elettrizzati, un mezzo elastico le cui deformazioni producono direttamente certe pressioni o tensioni, da noi percepite come azioni elettro-statiche.

La riunione di queste due vedute ha condotto MAXWELL a fondare quella generale *teoria elettro-magnetica*, a cui l'Ottica viene subordinata.

§ 20. **Ottica.**

Senza entrare in una minuta indagine storica, possiamo facilmente renderci conto della genesi delle idee che hanno portato ad una teoria meccanica della luce. Basta tener presenti:

1) l'analogia di certi fenomeni ottici e acustici, tra loro, e con taluni elementari fenomeni meccanici (propagazione rettilinea, leggi della riflessione ecc.):

2) la possibilità di fornire una concreta spiegazione meccanica del suono, ricorrendo alle vibrazioni, direttamente constatabili, dei corpi sonori;

3) il fatto fondamentale che la luce ha una velocità di propagazione finita, sebbene grandissima.

Nonostante le accennate analogie, NEWTON a cui risale la teoria meccanica del suono (corretta poi soltanto in un punto da LAPLACE) ha fondato la prima teoria ottica sopra una ipotesi essenzialmente diversa, cioè sulla *emissione* di una sostanza dai corpi luminosi. Nè è difficile spiegarsi la ragione del diverso cammino prescelto.

Perchè i fenomeni luminosi non si adattano ad essere spiegati col movimento della materia che cade sotto i nostri sensi, l'ipotesi dell'emissione viene a colmare il vuoto con un presupposto cui spetta per dir così un grado minimo di astrazione, e che riposa d'altronde sopra talune associazioni spontanee di cui trovasi traccia nel comune linguaggio. Aggiungasi che l'idea di assimilare più profondamente la luce al suono, mediante una teoria ondulatoria, doveva incontrare come incontrò difatti al suo nascere, alcune serie difficoltà.

Comunque, la teoria dell'emissione raggiunse per opera dei continuatori di Newton un alto sviluppo e, mercè un certo numero d'ipotesi supplementari, condusse LAPLACE a render ragione delle prime proprietà della riflessione e della rifrazione.

Ma i progressi nello studio sperimentale di quest'ultimo fenomeno, ed in ispecie la misura della velocità della luce nei mezzi diversamente rifrangenti, si mostrarono inconciliabili coll'insieme delle ipotesi adottate.

Si affermò pertanto di fronte all'ipotesi newtoniana, la teoria rivale, ideata da HUYGHENS, sviluppata da YOUNG e da FRESNEL, la quale dando risalto all'analogia fra suono e luce, tende a rappresentare il fenomeno luminoso come vibrazione di un mezzo elastico, l'*etere*, riempiente l'intero spazio.

E questa teoria mostrò sempre più la sua fecondità, giungendo p. es. (con Fresnel stesso) a spiegare i fenomeni di diffrazione, previsti da POISSON.

Ora il problema fondamentale che Fresnel dovette risolvere, consiste nello stabilire un'adeguata concezione della elasticità ipoteticamente attribuita all'etere.

Anzitutto l'ipotesi più facile che consiste nell'assimilare l'etere ad un mezzo gassoso estremamente rarefatto, si mostra inconciliabile coi fatti. Invero i fenomeni di polarizzazione e d'interferenza, unitamente ai resultati delle misure d'intensità nello studio della riflessione e della rifrazione, conducono necessariamente ad ammettere che *le vibrazioni luminose sono trasversali.*

Pertanto l'etere si presenta come dotato di una elasticità in un certo senso opposta a quella dei gas, giacchè in questi si trasmettono soltanto onde longitudinali e non trasversali, gli scorrimenti delle molecole non incontrando alcuna resistenza elastica.

Come ci rappresenteremo un tal mezzo?

Se non vogliamo scostarci dalle condizioni abituali di un modello meccanico, dobbiamo o assimilarlo ad un solido, dotandolo di *incompressibilità*, o all'opposto attribuirgli una *compressibilità* infinita.

Questa seconda ipotesi è stata adottata generalmente da FRESNEL, mentre F. NEUMANN e MAC-CULLAGH hanno svolto un'altra teoria dove si adotta sistematicamente la prima.

Le due vedute conducono a supporre che per la luce polarizzata la vibrazione di una particella d'etere sia rispettivamente perpendicolare o parallela al piano di polarizzazione. Ma sembra difficile decidere fra i due casi coll'esperimento; anzi l'analisi di POINCARÈ tende a dimostrare che la differenza fra di essi costituisce un'ipotesi indifferente, almeno nel campo proprio dell'Ottica dei corpi in quiete. Tuttavia una recente esperienza fotografica di WIENER, viene da questi interpretata come una conferma delle vedute di Fresnel.

Per quanto si attiene alla facilità della rappresentazione, c'è evidentemente molto di subiettivo; l'etere di Fresnel è un mezzo elastico completamente nuovo, che si riesce ad immaginare soltanto ove si pensi ad un gas in cui l'ufficio dell'elasticità sia sostituito a quello della viscosità; l'ipotesi dell'etere solido ci offre più difficilmente una rappresentazione dei rapporti fra l'etere stesso e la materia, e ci obbliga a postulare una forza particolare (detta di KIRCHHOFF) per spiegare la differente elasticità dell'etere sulle due facce della superficie che separa mezzi diversamente rifrangenti.

Avremo occasione di vedere più tardi come l'elasticità dell'etere venga spiegata sotto un aspetto nuovo mediante movimenti stazionarii (§ 24). Ma anche rispetto alla nuova concezione si ripresenta nella teoria della luce la reciprocità di spiegazioni, cui abbiamo accennato.

§ 21. Elettro-statica.

I tentativi di una spiegazione meccanica dei fenomeni elettrici ed elettromagnetici, si lasciano riattaccare a due vedute fondamentali di CLERK MAXWELL, le quali dovrebbero sovrapporsi e congiungersi in una teoria sintetica, ma fra cui permane tuttavia una difficoltà di accordo che l'autore non è riuscito a superare completamente. Indagando e criticando i fatti con una logica potente e con una mirabile intuizione delle analogie, nei singoli dominii dell'esperienza, Maxvell ha preferito di serbare diverse costruzioni parziali, colla fiducia che le apparenti contraddizioni debbano scomparire in una visione più estesa dei rapporti fisici, anzichè essere arbitrariamente eliminate per spirito di composizione sistematica.

Un primo ordine di analogie, che forma nell'opera di Maxwell una dottrina a sè, è la *teoria elastica delle azioni elettrostatiche.*

A quel modo che l'Ottica suggerisce la rappresentazione di un mezzo elastico, traverso a cui si trasmettono le onde luminose, l'attrazione e la repulsione a distanza fra corpi elettrizzati conduce Maxwell a supporre un mezzo elastico sui *generis* interposto fra i conduttori; le pressioni e tensioni del mezzo si traducono appunto nelle azioni elettriche. E questa ipotesi rappresentativa trova il suo fondamento nelle esperienze di FARADAY, da cui risulta l'ufficio importante dei dielettrici nei fenomeni elettrici.

Come si vede, il tentativo maxwelliano tende a ridurre le forze fra corpi distanti a forze esercitantisi per contiguità. Tuttavia il sistema d'immagini in cui vien tradotta questa idea direttrice, solleva gravi obiezioni.

BELTRAMI ha osservato che le tensioni producentisi nel mezzo maxwelliano non soddisfano alle condizioni differenziali che si trovano valere in generale per i *mezzi elastici,* ove si ammetta come proprietà caratteristica di questi, che lo stato di tensione prodotto da una deformazione infinitesima dipenda, per ogni elemento, da tale deformazione, e non dalla successione degli stati traverso a cui il corpo sia passato in precedenza.

Queste obiezioni non intaccano la possibilità di una spiegazione elastica delle azioni elettro-statiche, ma mostrano che questa non può essere data sotto la forma semplice proposta da Maxwell, dove le tensioni dipendono dallo stato locale delle forze del campo. Si può bensì, in altro modo, far corrispondere ad un campo di forze elettro-statiche, come in genere ad ogni campo di forze, una ben determinata deformazione di un mezzo elastico equilibrato sotto la azione delle forze suddette. In questo senso il SOMIGLIANA ha risoluto il problema di assegnare la deformazione e il corrispondente stato di tensione che spetta ad un mezzo elastico capace di spiegare le azioni elettro-statiche.

Ma qui le tensioni dipendono da tutto il campo di forze dato.

§ 22. **Elettro-magnetica.**

Anche nella trattazione dei fenomeni elettro-magnetici MAXWELL è guidato dall'idea direttrice di spiegare le forze a distanza con azioni esercitantisi per contiguità. Cerchiamo di interpretare, senza imporci vincoli troppo ristretti, il pensiero che regge questa trattazione.

Prendiamo le mosse dalle analogie colla teoria meccanica del calore.

Come in questa teoria si è condotti dai rapporti fra calore e lavoro alla ipotesi che il calore corrisponda ad un moto intimo delle particelle dei corpi, così i fatti dell'induzione elettro-magnetica, cui si lega produzione di lavoro meccanico, suggeriscono analogamente l'idea che l'energia elettro-magnetica sia da riguardare come una forma di movimento.

Maxwell insiste in ispecie sull'analogia fra i fenomeni d'auto-induzione delle correnti e le forze d'inerzia per trarne la veduta che alla corrente corrisponde « qualcosa che si muove ». Ma, poichè i suddetti fenomeni dipendono dalla forma del circuito e dal mezzo ambiente, rigetta l'ipotesi che ciò che si muove sia della elettricità nel filo conduttore. Una intuizione conforme allo spirito *sintetico* di FARADAY gli suggerisce invece di pensare al movimento di un fluido che riempia il dielettrico circostante.

Ora si tratta di spiegare con una tale ipotesi i varii fenomeni d'induzione elettro-magnetica. Questo è appunto lo scopo della teoria che Maxwell sviluppa nella 4ª parte del suo Trattato di elettricità e magnetismo.

E la spiegazione è ottenuta nel senso della Meccanica energetica (§ 16), le cui vedute trovarono qui per la prima volta una importante applicazione concreta.

Esponiamo i principii direttivi della teoria maxwelliana, riferendoci per semplicità al caso della Elettro-magnetica dei *corpi in quiete* entro un *mezzo omogeneo*. Nella impossibilità di determinare il meccanismo nascosto che corrisponde ai fatti visibili, si possono tuttavia esprimere col principio di HAMILTON le relazioni che passano fra due forme d'energia date nel campo dell'esperienza, cioè fra l'*energia elettrica* che (indipendentemente dalle ipotesi più particolari del precedente paragrafo) può riguardarsi come *energia potenziale*, e l'*energia elettro-magnetica* da riguardarsi come *energia cinetica* o forza viva. La teoria elettro-statica fa conoscere la espressione della prima energia in funzione delle cariche elettriche, delle distanze ecc.; il modo come la seconda energia dipende dalle intensità delle correnti elettriche e dai rapporti geometrici dei circuiti viene criticamente indagato da Maxwell.

Ora le *anzidette relazioni energetiche rappresentano bene i fatti dell'induzione elettro-magnetica.*

Da esse si passa poi naturalmente alle *equazioni di un campo elettro-magnetico,* le quali esprimono che lo stato futuro del campo è determinato da quello attuale, e dove figurano legati diversi elementi che entrano nelle combinazioni integrali rappresentanti le due energie suindicate.

Il contenuto positivo delle equazioni nominate verrà chiarito più oltre, seguendo HERTZ e LEVI-CIVITA.

Dagli sviluppi di Maxwell non scaturisce una figurazione adeguata del meccanismo nascosto dei fenomeni elettro-magnetici, ma soltanto lo schema di un mezzo che grossolanamente si può rappresentare come un *sistema cellulare contenente un fluido*.

Il movimento del fluido corrisponde all'energia elettro-magnetica, e le reazioni elastiche, cioè le pressioni e tensioni determinate da codesto movimento nelle pareti delle cellule, danno luogo all'energia elettro-statica.

Abbiam già rilevato che l'importanza di questo schema sta nella rappresentazione e nel legame posto fra i varii fenomeni elettro-magnetici e in ispecie fra i fenomeni d'induzione.

Diventa quindi possibile di proseguire la visione immaginativa dei fenomeni suddetti al di là del campo dell'esperienza. E così appunto Maxwell è stato condotto alla sua più importante scoperta.

Egli ha osservato che oscillazioni elettro-magnetiche periodiche estremamente rapide dovrebbero produrre fenomeni analoghi a quelli della luce. Le onde luminose potranno dunque riguardarsi come un caso particolare di codeste oscillazioni, corrispondenti ad una lunghezza d'onda estremamente piccola.

Queste vedute teoriche ricevono nell'opera maxwelliana una limitata conferma; la più saliente è il riscontro che la velocità della luce è sensibilmente uguale al rapporto delle due unità di quantità elettrica nei sistemi di misura elettro-statico ed elettro-magnetico; il confronto fra le proprietà ottiche ed elettriche dei corpi dà resultati meno soddisfacenti, se si domandano accordi quantitativi un po' precisi.

Vent'anni dopo le oscillazioni elettriche venivano realizzate sperimentalmente da HERTZ, e misuratane quindi la velocità di propagazione, si ritrovava conformemente alla previsione teorica la velocità della luce!

Da quel giorno nuove analogie tra i fenomeni ottici ed elettro-magnetici si sono venute accertando in gran numero, p. es. si sono ripetute per le onde elettro-magnetiche le varie esperienze sulla riflessione, la rifrazione ecc., procedendo soprattutto in questo senso l'opera di AUGUSTO RIGHI [1].

Così si può dire che il concetto generale della teoria elettro-magnetica della luce costituisce ormai un acquisto sicuro per la Scienza.

§ 23. **Contenuto positivo della teoria di Maxwell.**

Nell'opera di MAXWELL si riconoscono sovrapposte vari costruzioni parziali che, per una parte tendono ad una rappresentazione meccanica dei feno-

[1] Cfr. « L'Ottica delle oscillazioni elettriche », Bologna, Zanichelli, 1897.

meni ottico-elettro-magnetici, e per l'altra riescono ad un collegamento fra varii dati fenomenici, espresso dalle equazioni di un campo elettro-magnetico.

Ora in queste equazioni figurano elementi di vario ordine, cioè dati relativi al modello meccanico accanto a dati definiti da esperienze possibili; quindi la necessità di un lavoro di critica volto a riconoscere il contenuto positivo della teoria maxwelliana.

Appunto una tale critica ha condotto HEAVISIDE e HERTZ a trasformare e semplificare le equazioni di Maxwell.

Hertz soprattutto, a prescindere dall'estensione delle equazioni suddette a mezzi cristallini anisotropi, ha il merito di avere spiegato lucidamente il significato di codeste equazioni in due memorie classiche, consacrate rispettivamente alla elettro-magnetica dei *corpi in quiete* e dei *corpi in moto* (1).

Ci riferiremo qui al primo caso.

Poniamo che in un mezzo omogeneo o nel vuoto, siano dati più corpi immobili sede di fenomeni elettrici ed elettro-magnetici; resta così definito un *campo elettro-magnetico*, cioè per ogni punto sono definiti, in funzione del tempo, due vettori: la *forza elettrica* e la *forza magnetica*. La forza elettrica è la forza che si eserciterebbe in ogni punto del campo sopra una massa elettrica unitaria che ivi sia trasportata; essa viene definita indipendentemente dalla distinzione delle forze di *origine elettro - statica* ed *elettro - magnetica* di cui esprime la resultante. La forza magnetica viene definita in modo del tutto analogo alla forza elettrica.

Le definizioni date hanno un significato positivo in rapporto ad esperienze possibili, a parte la difficoltà pratica di misurare la forza elettrica in unità elettro-statiche.

La conoscenza del campo delle forze elettriche e magnetiche determina poi completamente il corso dei fenomeni ed in ispecie dei fenomeni elettrodinamici, indipendentemente dalla conoscenza dei corpi elettrizzati, delle correnti e dei magneti che hanno servito a definire il campo stesso. Ciò in base ad un'*ipotesi fondamentale* generalmente accolta come estensione della legge di OHM, verificata pei fenomeni permanenti: la corrente elettrica in un conduttore è vettorialmente proporzionale per ogni punto alla forza elettrica che vi agisce.

Il campo delle forze elettriche e quello delle forze magnetiche sono in una stretta dipendenza l'uno dall'altro. Hertz assume senz'altro come ipotesi le equazioni che esprimono tale dipendenza, le quali, riferendosi ad un mezzo coibente omogeneo ed isotropo, possono tradursi come segue:

1) La variazione della forza magnetica rispetto al tempo è proporzionale al *curl* (2) della forza elettrica;

(1) Wiedemann's Annalen », t. 40, 41 (1890) e « Nuovo Cimento », t. 28.

(2) Il *curl* designa un'operazione geometrica sui vettori, che dipende dalla variazione *locale* del vettore nel campo.

2) La variazione della forza elettrica è reciprocamente proporzionale al curl della forza magnetica.

Se il campo è un conduttore questa seconda legge va modificata nel senso che alla variazione della forza si aggiunge quella dovuta alla corrente, la quale è (come notammo) proporzionale alla forza stessa.

Le nominate equazioni, a cui era giunto ugualmente Heaviside trasformando e semplificando quelle di Maxwell, determinano la conoscenza del campo elettro-magnetico futuro, dato lo stato attuale; esse ci dicono infatti come ogni perturbazione elettro-magnetica locale si propaghi nello spazio e nel tempo.

Alle equazioni del campo elettro-magnetico occorre aggiungere soltanto le equazioni di condizione che esprimono la *conservazione dell'elettricità* e del *magnetismo,* la prima delle quali serve a differenziare l'etere (vuoto) dalla materia.

Si può allora interpretare queste equazioni e dedurne, come Hertz mostra, le note leggi fisiche : in primo luogo quelle relative ad un regime permanente, sia p. es. la legge di OHM per i circuiti chiusi, i principi di KIRCHHOFF pei conduttori in derivazione, la regola di AMPÈRE e la legge di BIOT e SAVART; poi le leggi dell' induzione che l' esperienza ci fa conoscere per circuiti chiusi ecc.

La verifica delle conseguenze tratte dalle equazioni del campo elettro-magnetico, giustifica secondo Hertz queste equazioni stesse assunte come ipotesi fondamentale della teoria.

Ma perchè la verifica appaia veramente dimostrativa dell'ipotesi, importa stabilire che questa può essere dedotta a sua volta da alcune delle leggi fisiche sottoposte all'esperienza.

Ciò appunto è stato fatto da T. LEVI-CIVITA [1], il quale riprendendo la teoria di HELMHOLTZ, e correggendola coll'ipotesi di un tempo di propagazione delle azioni a distanza, ha fatto vedere che essa conduce alle equazioni di Hertz.

Vogliamo spiegare più precisamente questo importante risultato.

Si ammetta che :

1) valga il principio di *conservazione dell'elettricità*, e quindi si possa rappresentare la variazione di un campo elettro-magnetico come il movimento di un fluido che subisce una condensazione ove si trova la materia;

2) valgano le leggi sull'azione elettro-statica di COULOMB, sull'azione elettro-magnetica di BIOT e SAVART, e sull' induzione elettro-dinamica di F. NEUMANN [2], corrette coll'ipotesi di una *velocità di propagazione* proporzionale a quella della luce;

[1] Cfr. il « Nuovo Cimento », 1897.

[2] Il Levi-Civita fa espressamente rilevare che è essenziale di scegliere la legge po-

allora si può calcolare in ciascun punto del campo la forza elettrica che risulta dalle due componenti di origine elettro-statica e di origine elettro-dinamica, e la forza magnetica data dalla legge di Biot e Savart; queste due forze, per ogni mezzo omogeneo ed isotropo in quiete, vengono legate dalle equazioni di Hertz.

Possiamo dunque concludere che: *Gli sviluppi di Hertz e di Levi-Civita pongono in luce il contenuto positivo della teoria elettro-magnetica di Maxwell. Per mezzi omogenei ed isotropi in quiete, questa teoria equivale alla somma del principio di conservazione dell'elettricità e delle leggi di Coulomb, Biot e Savart ed F. Neumann, corrette coll'ipotesi di un tempo di propagazione delle azioni a distanza.*

§ 24. L'elasticità riguardata come movimento.

Mentre la critica positiva della teoria maxwelliana riesce ad eliminare dalle equazioni del campo ogni distinzione fra forze elettriche di origine elettro-statica e forze di origine elettro-magnetica, anche le speculazioni intorno al modello meccanico dei fenomeni tendono d'altra parte a sopprimere codesta distinzione.

Maxwell aveva riguardato le forze elettro-statiche come *vere forze elastiche*, e le forze elettro-magnetiche come *forze d'inerzia* o *forze apparenti* dovute a *movimenti nascosti*; uno sviluppo della rappresentazione meccanica nel senso cartesiano conduce a ritenere anche le azioni elettro-statiche come effetto di moti nascosti, e più generalmente a spiegare l'*elasticità come una forma di movimento*.

Questa idea si è presentata per la prima volta a MAC-CULLAGH (1839) il quale nella spiegazione delle proprietà ottiche dei cristalli fu condotto ad immaginare l'etere luminoso non più come un mezzo elastico propriamente detto, ma come un mezzo dove avvengono certi movimenti stazionarii che simulano una *elasticità rotazionale*. FITZ GERALD ebbe a notare come questo modello si adatti nel miglior modo ad accordare la rappresentazione dei fenomeni ottici ed elettro-magnetici. Ma le difficoltà di figurazione sono state tolte da W. THOMSON mercè il modello concreto di un *etere girostatico*.

Il fondamento della costruzione consiste nella proprietà degli assi permanenti di rotazione che si osserva nel giroscopio. Con quattro giroscopii articolati a losanga si può comporre un sistema che simula l'elasticità di una molla. Se s'imprime a tutto il sistema una rotazione, l'asse presenta una resistenza ad essere spostato dalla sua direzione. Collegando quindi una infinità di sistemi elementari siffatti, si riproduce il modello di un etere capace di rappresentare

tenziale di F. Neumann fra le varie leggi elementari d'induzione per circuiti aperti che sono compatibili colle esperienze relative a circuiti chiusi, e ne deduce un argomento in appoggio di questa legge in confronto ad altre che sono state proposte.

la rotazione del piano di polarizzazione della luce in un campo magnetico (fenomeno osservato da FARADAY).

Uno sviluppo ulteriore della sua idea costruttiva conduce Thomson ad immaginare un *modello idrocinetico* delle azioni elettro-dinamiche, nel quale la impenetrabilità e l'inerzia della materia, ove si effettuano dei moti stazionarii, producono dunque delle forze apparenti analoghe alle azioni amperiane delle correnti.

Accanto a questo modello è da citare quello proposto da C. A. BIERKNES per le azioni elettro-statiche (o newtoniane), dove queste azioni si producono come effetto del moto vibratorio di *sfere pulsanti* entro un liquido.

Accade tuttavia nei modelli citati che le azioni simulate sono *inverse* alle azioni reali: ma POINCARÈ ha mostrato come questa inversione si possa togliere modificando l'interpretazione dei modelli stessi [1].

Vi è di più un'altra difficoltà nel modello di Bierknes; infatti egli ha dovuto supporre che le sfere pulsanti abbiano ugual periodo ed egual fase (o fasi differenti di π), il che appare inammissibile.

Si può togliere questa difficoltà supponendo un moto di contrazione o di dilatazione continuo, invece che alternativo.

Questo caso corrisponde appunto alla rappresentazione di una particella elettrizzata ove si costruisca una estensione dell'Ottica di FRESNEL adattata ai fenomeni elettro-magnetici, cioè una teoria in qualche modo reciproca di quella costruita recentemente da LARMOR come estensione dell'Ottica di MAC-CULLAGH di NEUMAN [2].

Mentre le speculazioni accennate mirano a rappresentare in concreto le forze elettriche come forze d'inerzia, HERTZ veniva condotto ad immaginare che una spiegazione analoga debba valere in generale per tutte le forze, cioè che queste possano sempre sostituirsi coi *movimenti di masse nascoste vincolate*.

Nella sua Meccanica postuma si trova appunto una giustificazione astratta di questa veduta, ed il disegno di una trattazione della scienza del moto da cui ogni nozione propria di forza resta bandita.

L'ipotesi fondamentale è dunque che esistano, connesse colla materia visibile, masse invisibili, per modo che ogni fenomeno ed in particolare ogni movimento della materia visibile, importi in generale un movimento della invisibile; la legge del movimento si riduce ad una *generalizzazione del postulato d'inerzia di Galileo-Newton*.

Ogni sistema isolato si muove per modo che la successione delle sue posizioni risponda ad una condizione di minimo, che può essere espressa dal *principio di minimo sforzo di* GAUSS, analoga a quella cui soddisfa la retta

[1] « Electricité et optique ». Paris, 1901, p. 616 e seg.
[2] Cfr. POINCARÈ, l. c.

fra le possibili traiettorie di un punto nello spazio, e la geodetica fra le possibili traiettorie di un punto sopra una superficie.

Le *forze* apparenti non sono che le *reazioni dei legami*.

Lo schema abbozzato da Hertz non è stato condotto da lui fino alla trattazione di problemi determinati, dove appaia in qual senso e modo possa risolversi convenientemente l'arbitrarietà che rimane nella scelta dei moti nascosti, e qual partito possa trarsi da codesta ipotesi per la spiegazione dei fenomeni.

Ma le rappresentazioni meccaniche dell'elettro-magnetismo sopra citate, p. es. il modello di Bierknes, possono valere come illustrazione del programma hertziano.

D'altronde si può osservare che i varii sviluppi della Fisica-meccanica analizzati fin qui tendono in generale a ridurre le forze al tipo elastico, sicchè per realizzare l'idea di Hertz importa costituire in modo completo, secondo le vedute di Thomson, una trattazione della elasticità riguardata come movimento.

§ 25. **Elettro-magnetica dei corpi in movimento: teoria di Hertz.**

Lo sviluppo speculativo che tende alla spiegazione meccanica dei fenomeni elettro-magnetici fa capo ad un modello di tipo cartesiano teoricamente generale e perfetto, benchè non ancora svolto adeguatamente in modo concreto. Ma le speculazioni intorno a questo meccanismo nascosto restano troppo lontane dalle applicazioni concrete della teoria, la quale, come abbiam visto, ha un contenuto indipendente dalle sue basi meccaniche.

Ove si tratti di proseguire queste applicazioni, di perfezionare e di estendere il modello elettrico dei fenomeni ottici, le forze elettriche possono venir assunte come dati primitivi senza investigarne la possibile riduzione.

Così appunto accade nelle equazioni hertziane, che abbiamo considerato nel § 23 limitandoci alla Elettro-magnetica dei corpi in quiete; così ancora nei nuovi sviluppi a cui ha condotto il tentativo di coordinare i varii fenomeni elettro-magnetici dei corpi in movimento, ed in particolare nella teoria di LORENTZ.

Vogliamo render conto in breve di queste dottrine lasciando da parte gli sviluppi precedenti di MAXWELL; e prendiamo le mosse dalla trattazione della elettro-magnetica dei corpi in movimento di HERTZ, cercando d'interpretare la genesi dell'idea direttrice che l'ispira.

Se consideriamo un mezzo indeformabile in quiete (o ritenuto come tale), e determiniamo in esso un campo elettro-magnetico (mediante corpi immobili, elettrizzati o magnetizzati o percorsi da correnti) troviamo che in ogni punto la forza elettrica e magnetica sono legate dalle equazioni differenziali, il cui contenuto è stato analizzato nel § 23.

Ora queste equazioni si possono estendere in due sensi.

In primo luogo si può ammettere che esse valgano comunque il *campo elettro-magnetico* sia *prodotto da corpi che si muovano entro il mezzo dato*. Così p. es., un corpo elettrizzato che si muove darà luogo in ogni punto ad una variazione progressiva della forza elettrica, e quindi ad una perturbazione del tutto analoga a quella generata da una corrente: ciò è d'accordo colle esperienze di ROWLAND che assimilano la corrente elettrica *per convezione* (trasporto) alla corrente *per conduzione* (voltaica).

In secondo luogo, se i fenomeni si propagano entro mezzi diversi che si muovano l'uno rispetto all'altro, si può supporre una *indipendenza relativa* di questi, cioè ritenere che in ognuno si abbia un campo elettro-magnetico proprio, definito dalle medesime equazioni hertziane prese come *relative al mezzo stesso*.

Hertz assume appunto tale ipotesi, completandola per riguardo al caso di *mezzi* materiali *deformabili*.

Si è facilmente condotti a questa estensione mercè le considerazioni seguenti.

Dalle equazioni differenziali riferentisi ad un mezzo indeformabile, si possono desumere *leggi integrali* (una delle quali fu assegnata da Maxwell) che esprimono la variazione del flusso di forza elettrica o magnetica attraverso una superficie chiusa, per il flusso della forza magnetica o rispettivamente elettrica lungo il contorno. *Hertz assume come ipotesi fondamentale che queste leggi valgano per un mezzo in movimento, in senso relativo ad esso, cioè rispetto a circuiti materializzati deformantisi col mezzo.*

La teoria di Hertz viene presentata dall'autore come un insieme di ipotesi compatibili con un piccolo numero di esperienze sul trasporto dei corpi elettrizzati e sugli effetti d'induzione del moto di circuiti attraversati da correnti; e l'autore stesso rileva la circostanza che in queste esperienze si tratta sempre di movimenti con velocità piccole rispetto alla velocità della luce.

La necessità di una correzione emerge dai fenomeni ottici che si presentano nei corpi in moto relativo, ed in ispecie dalla *aberrazione astronomica*.

Sia B un mezzo impolarizzabile, A una sorgente di onde elettro-magnetiche o luminose, e poniamo per fissare le idee che A sia a grande distanza da B in guisa da dare origine ad onde piane; così B può rappresentare la nostra atmosfera ed A una stella. Per ipotesi B si muove rispetto ad A.

Se si tien conto delle equazioni ai limiti nel passaggio dal mezzo di A al mezzo B, la teoria hertziana conduce ad ammettere che le onde emesse da A vengano come catturate e trascinate da B nel suo movimento, conservando in B il carattere di onde piane. Ne risulta che la velocità relativa di propagazione di queste onde in B, è quella stessa V che esse avrebbero se B fosse in quiete rispetto ad A.

A questa conseguenza contraddice l'aberrazione della luce, nota fino da BRADLEY. Infatti l'aberrazione implica che la luce proveniente dalla stessa A continui a muoversi entro l'atmosfera B colla stessa velocità V *rispetto ad* A, e quindi (designando con v la velocità della terra) con una velocità V-v rispetto alla terra.

Per spiegare l'aberrazione astronomica, si può cercare di sostituire al principio hertziano, esprimente una *relatività locale* dei fenomeni elettro-magnetici, un *principio di relatività esteso* che si armonizza col punto di vista sintetico di FARADAY-MAXWELL.

Consideriamo per semplicità un mezzo indeformabile B che si muova rispetto ad A, sede di fenomeni elettro-magnetici.

Si può ammettere che per un osservatore interno a B, e trascinato col mezzo, i fenomeni si presentino come se il mezzo B si estendesse fino a comprendere A.

Per giustificare una tale ipotesi, basta rappresentare i fenomeni elettro-magnetici come perturbazioni di un etere, definite dai *punti singolari* che corrispondono alle cariche elettriche portate da A.

Il procedere delle perturbazioni suddette col moto di A rispetto a B, si può raffigurare semplicemente ponendo che l'etere stesso sia trasportato con A rispetto a B.

La stessa ipotesi si lascia esprimere ritenendo l'etere immobile con A, e B in movimento. Se A è una stella, B la terra, v la velocità di B rispetto ad A, V la velocità di propagazione della luce in un mezzo come la nostra atmosfera, si trova allora che la luce proveniente dalla stella si propaga nella atmosfera terrestre colla velocità V-v.

Da ciò il fenomeno dell'aberrazione, spiegato nel modo che corrisponde alle vedute di FRESNEL nella teoria ondulatoria.

Ma la spiegazione vale soltanto per il fatto elementare osservato da Bradley.

Gli astronomi di Greenwich hanno misurato l'aberrazione con un telescopio riempito d'acqua; la diversa velocità di propagazione delle onde luminose nell'acqua dovrebbe condurre qui ad un angolo d'aberrazione diverso; invece l'angolo non muta.

Questo resultato fu interpretato da Fresnel nel senso che « rispetto all'acqua l'etere non resta più fisso ma viene parzialmente trascinato ».

Il *trascinamento parziale delle onde luminose* nella materia in moto viene poi confermato dagli esperimenti di FIZEAU, anche recentemente ripetuti da altri: il movimento dell'acqua dà luogo ad uno spostamento nelle frange prodotte da due raggi luminosi interferentisi.

Di qui resulta che le più estese esperienze riferentisi ai fenomeni ottico-elettro-magnetici dei corpi in movimento, non possono venire spiegate neppure

da un'*ipotesi di relatività estesa* come quella sopra enunciata. I suddetti fenomeni dipendono dal moto relativo dei corpi, dalla velocità di propagazione nel mezzo ove vengono constatati e da *qualcos'altro*, cioè (attenendosi all'esperienza) da caratteri qualitativi della materia che costituisce il mezzo suddetto.

Si tratta di costruire una teoria atta a render conto delle complesse condizioni dei fatti.

§ 26. **Teoria di Lorentz.**

La teoria di LORENTZ [1] (1892) è stata costruita a questo scopo. Il concetto fondamentale consiste nell'attribuire il trascinamento parziale delle onde elettro-magnetiche nella materia in moto, alla modificazione del campo prodotta da cariche elettriche che, per ipotesi, verrebbero trascinate dalla suddetta materia.

Per fissare le idee si consideri un corpo A ritenuto come fisso rispetto all'etere, ed un corpo B che si muova rispetto ad A (e all'etere stesso); si trovano sovrapposte entro B due serie di perturbazioni, relative ad A e a B, queste ultime progrediscono col moto di B, ed *il resultato complessivo equivale all'ipotesi di un trascinamento parziale dell'etere entro B*.

Il caso precedente può essere generalizzato ove si considerino più corpi A, B, C,... in moto relativo. In tal caso non si ha più motivo di ritenere che l'uno o l'altro di questi corpi, da cui vengono emesse onde elettro-magnetiche, sia fisso rispetto all'etere.

Per superare la difficoltà Lorentz postula un sistema di riferimento *assoluto*, cioè un etere indipendente dalla materia, le cui parti non variano le une rispetto alle altre, e a questo etere preso come immobile si confronta il moto dei corpi.

Il postulato è veramente arbitrario e darà luogo a conseguenze che dovremo poi esaminare; ora cerchiamo di renderci conto del modo come la prima ipotesi fondamentale venga concretata da Lorentz, in un sistema di immagini atomistiche.

Nell'antica teoria di POISSON si avevano due *fluidi elettrici*, il positivo ed il negativo (cfr. cap. II, § 26); Lorentz riprende in sostanza questa concezione, ma riguarda i due fluidi come costituiti di particelle materializzate (*elettroni*) il cui trasporto costituisce le correnti.

Egli adotta poi sul magnetismo l'ipotesi di AMPÈRE, che esso sia la manifestazione di correnti nelle particelle del magnete.

Si ha così una veduta unificata dei varii fenomeni elettro-magnetici.

È soprattutto interessante di riconoscere come un raffronto geniale di fatti

[1] Si confronti per la bibliografia l'articolo di Lorentz nel Band V_2 Heft 1 della Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig, Teubner, 1904.

diversi abbia condotto a ridurre ad un unico tipo le tre specie di correnti elettriche, cioè :

1) le *correnti voltaiche* nei conduttori,

2) le *correnti elettrolitiche*, attraverso liquidi o gas che si decompongono,

3) e le correnti di *convezione*, cioè per trasporto di corpi elettrizzati.

L'ipotesi unificatrice di Lorentz trova la sua base nelle considerazioni seguenti :

1) Le esperienze di ROWLAND provano l'azione delle correnti di convezione sul galvanometro.

2) Le leggi dell'elettrolisi di FARADAY possono essere spiegate (come già notarono MAXWELL ed HELMHOLTZ), ammettendo che le correnti elettrolitiche sieno dovute al trasporto di piccole cariche elettriche invariabili, connesse a certi gruppi atomici.

3) In ispecie i fatti relativi alla propagazione elettrica nei gas inducono a ritenere una *dissociazione elettrica* o *ionizzazione* di questi.

4) La ionizzazione dei gas per mezzo di *raggi catodici*, emanati dai tubi di CROOKES, suggerisce la veduta che i raggi suddetti sieno scariche di elettroni.

5) La permeabilità dei metalli ai raggi catodici, induce a ritenere che gli elettroni possano muoversi liberamente nei conduttori, siccome esige l'ipotesi che le correnti voltaiche consistano nel movimento di elettroni.

Ora in qual modo le vedute di LORENTZ porgono un sistema di ipotesi determinate, traducibili colle equazioni di un campo elettro-magnetico?

Per l'etere libero vengono assunte senz'altro le equazioni di HERTZ; lo stesso ha luogo per l'etere contenuto nella materia ove non si trovino particelle elettrizzate, salvo la necessità di tener conto delle forze che gli elettroni esercitano sulla materia stessa. Tutta la difficoltà sta nel comprendere come debbono essere modificate le equazioni suddette pel campo interno ad un elettrone, cui vengono attribuite dimensioni finite. Non cercheremo di chiarire questo punto, e ci limiteremo ad osservare che s'introduce qui qualche ipotesi solo parzialmente giustificata a priori, la quale potrà essere poi indirettamente confermata dalle conseguenze dedotte.

Una volta assegnate, per dir così, le leggi elementari dei fenomeni, non si ha che da sovrapporle per dedurre in generale le equazioni rappresentanti, secondo Lorentz, il campo elettro-magnetico più generale. Occorre perciò tener conto per ciascun punto della *media* degli effetti prodotti dal movimento degli elettroni.

Si ha quindi una *teoria cinetica statistica del movimento degli elettroni*, che ricorda la teoria cinetica dei gas.

E l'importante è questo : la teoria, non soltanto rende conto dei fatti in

vista dei quali fu costruita, ma porge una buona spiegazione delle esperienze di FARADAY sulla rotazione del piano di polarizzazione della luce in un campo magnetico, e conduce a prevedere nuovi rapporti fra la luce e il magnetismo, in ispecie la decomposizione delle righe dello spettro in un campo magnetico, verificata da ZEEMAN.

È vero che nuove esperienze su questo fenomeno hanno portato a modificare in parte le previsioni e a complicare le primitive vedute di Lorentz, ma la scoperta sperimentale razionalmente disposta dalla teoria significa sempre un successo di questa.

Ed il successo è tanto più saliente nel caso che ci occupa, perchè risponde ad un desiderato dell'Ottica elettro-magnetica : scoprire nuovi rapporti positivi fra la luce e l'elettro-magnetismo.

§ 27. **Critica : il principio d'azione e reazione.**

L'interesse suscitato dalla teoria di LORENTZ, il suo successo nella spiegazione dei fatti noti e nella previsione di fatti nuovi, hanno richiamato su di essa la critica dei più illustri scienziati ed hanno dato impulso a più estesi tentativi di verificazione.

Dal punto di vista della Dinamica classica, la teoria di Lorentz ha un grave difetto : *non soddisfa al principio newtoniano d'azione e reazione*. Almeno il principio non è soddisfatto se si vuole intendere nel solo modo che abbia un significato positivo, cioè come *relativo alla materia*.

È facile rendersi conto che questa conseguenza risulta non tanto dalle vedute particolari di Lorentz, ma dall'ufficio che, secondo le idee maxwelliane, si attribuisce all'etere come propagatore delle azioni apparentemente a distanza.

Un corpo investito dalla luce subisce una pressione, già prevista da MAXWELL e BARTOLI, e verificata sperimentalmente da LEBEDEF; e, quantunque si tratti di esperimenti delicati, il resultato appare tanto più credibile in quanto si riavvicini alle circostanze del movimento delle comete, che avevano già indotto il FAYE ad invocare un'ipotesi analoga.

Ora la pressione di Maxwell-Bartoli non si concilia col principio newtoniano d'azione e reazione, perchè il momento in cui la luce investe un corpo non coincide con quello in cui essa emana dalla sorgente.

Ma vi è di più. Una analisi approfondita di POINCARÈ ha messo in luce che la violazione del principio newtoniano è necessariamente legata ad ogni teoria elettro-magnetica che voglia render conto del *trascinamento parziale delle onde luminose*.

Si giunge bene a comprendere questa necessità se si riprendono un momento in esame le ipotesi di Hertz.

Fra due corpi elettrizzati A e B in quiete relativa, si esercitano delle forze elettrostatiche, conformi al principio newtoniano; ma se A e B si muo-

vono, e l'azione si propaga con velocità finita, la forza che agisce su ogni punto di A non è più diretta verso i punti di B da cui emana. Sopravviene però come termine correttivo nelle equazioni di Hertz, l'azione amperiana fra gli *elementi di corrente* che corrispondono al moto di A e B; e pertanto per le azioni complessive il principio newtoniano viene soddisfatto.

Ma supponiamo ora che la propagazione della forza che emana da A su B, venga modificata dal moto di un mezzo che accompagni B (è questa in sostanza l'ipotesi che corrisponde al trascinamento anzidetto); ciò porta a modificare la direzione della forza complessiva agente su B, cioè ad invalidare quell'accidentale compenso che si faceva nella teoria hertziana: il principio newtoniano d'azione e reazione non sussiste più!

E giacchè questa conclusione proviene, non tanto dalle ipotesi particolari di Lorentz, ma dalle esperienze di FIZEAU, la caduta del principio stesso s'impone come un fatto.

Ne discuteremo più avanti le conseguenze.

§ 28. **Il principio di relatività.**

Ora ecco un'altra circostanza più grave, solo in apparenza legata alla precedente.

La teoria di LORENTZ lascia prevedere la possibilità di constatare il *moto della materia rispetto all'etere*, cioè un vero *moto assoluto* che non dipende dalle relazioni fra i corpi!

Si è discusso intorno alla possibilità di una esperienza verificatrice. Si è trovato dapprima che nelle esperienze terrestri i fenomeni luminosi non possono permettere di riconoscere il movimento della terra in un ordine di approssimazione in cui si trascuri il quadrato dell'aberrazione astronomica. Ma come diremo, si sono immaginate esperienze più delicate in cui si dovrebbe avere un resultato apprezzabile: l'esito è stato negativo.

A vero dire ciò non ha provocato alcuna meraviglia; ma conviene rendersi conto dei motivi che conducono ad una così strana previsione nella teoria di Lorentz. Non si tarderà a riconoscere che i successi della teoria non portano veramente, come si potrebbe credere, nessuna presunzione a priori in favore dell'ipotesi che l'esperimento ha invalidato.

Lorentz ha tratto la sua concezione degli elettroni da un geniale ravvicinamento di fatti diversi; il valore delle sue ipotesi deriva appunto dalle osservazioni preliminari che in esse sono contenute. Ma nel riferire il moto degli elettroni ad un etere fisso, indipendente dai corpi, l'illustre fisico ha seguito un criterio arbitrario, per quanto comodo agli scopi della trattazione matematica. Ora è appunto questa ipotesi arbitraria, questa specie di assoluto posto a base della teoria, che si ritrova nelle deduzioni ulteriori; le quali sotto tale rispetto non acquistano dunque una maggiore credibilità per essere state concatenate ad ipotesi aventi un'origine attendibile.

Ma esaminiamo le conseguenze a cui si è condotti dagli sviluppi della teoria.

Un sistema materiale S si muova rispetto all'etere di una traslazione p. es. uniforme.

Due punti materiali elettrizzati A e B, legati ad S, non esercitano più fra loro una semplice azione elettrostatica, ma generano due correnti la cui azione amperiana diminuisce la prima. A vero dire questa correzione sarebbe da considerare in senso positivo come non eistente se essa non dipendesse dalla posizione di A e B rispetto al senso della traslazione, giacchè in tal caso non potrebbe essere misurata da un osservatore trasportato con S, bensì soltanto da chi potesse fare confronti con ciò che avviene nell'etere immobile. Ma la suddetta azione amperiana dipende dalla direzione della retta AB, e però diventa virtualmente constatabile con esperienze interne ad S.

Un'esperienza ottica effettiva, compiuta da MICHELSON nel 1881 e ripetuta da questo stesso sperimentatore insieme a MORLEY nel 1887, risponde appunto al problema posto dalle considerazioni precedenti.

Si tratta schematicamente di questo:

In S sono dati tre punti A, B, C vertici di un triangolo isoscele, rettangolo in A; AB è la direzione del moto traslatorio di S, AC è perpendicolare a questa; allora le velocità di propagazione della luce da A in B, e da A in C debbono essere diverse.

L'esperimento fatto sulla terra, presa come sistema S, non lascia constatare alcuna differenza; orbene il calcolo di questa differenza mostra che essa è dell'ordine del quadrato dell'aberrazione e però dovrebbe essere apprezzabile!

In tal modo dall'esperienza di Michelson si è tratta la conferma del *principio di relatività: mediante esperienze ottico-elettro-magnetiche interne ad un sistema mobile, non si può determinare il moto traslatorio di questo rispetto all'etere.*

Per spiegare tale resultato negativo Lorentz stesso e FITZ-GERALD hanno fatto l'ipotesi che tutte le lunghezze dei corpi in moto subiscano un piccolo accorciamento nel senso della traslazione; quindi le distanze AB, AC che nell'esperimento *appariscono* uguali, in *realtà* (cioè rispetto all'etere) sieno da riguardare come diverse.

Per rendere plausibile questo accorciamento (che per la terra è dell'ordine del quadrato dell'aberrazione) e per ottenere la spiegazione completa del principio di relatività (almeno nel caso della traslazione uniforme) si è ricorso ad altre ipotesi, cioè che le forze molecolari da cui in definitiva dipendono le dimensioni dei corpi sieno d'origine elettro-magnetica, che la materia stessa sia una riunione di elettroni (§ 31) e che questi in luogo di conservare una forma sferica invariabile (ABRAHAM) subiscano una contrazione come se l'etere prema su di essi nel movimento, e si riducano quindi ad ellissoidi schiacciati,

sia conservando lo stesso volume (BUCHERER, LANGEVIN) sia conservando due assi uguali (LORENTZ) [1].

Quest'ultima ipotesi è veramente la sola che, combinata alle precedenti, renda conto del principio di relatività, e secondo POINCARÈ [2] si giustifica ammettendo che l'etere eserciti sull'elettrone deformabile e compressibile una pressione costante, il cui lavoro sia proporzionale alla variazione di volume.

Ora le ipotesi sopra accennate portano una radicale trasformazione nella Dinamica classica, la quale viene sostituita con una nuova *Dinamica elettrica*, di cui diremo più avanti. Ci limitiamo qui a riassumere il resultato a cui si è condotti nella questione che ci occupa.

Il principio di relatività pei fenomeni elettro-magnetici si può spiegare nella teoria di Lorentz mediante le seguenti ipotesi e considerazioni:

1) I corpi sono formati da *elettroni* i quali si *contraggono* in una traslazione, riducendosi ad ellissoidi schiacciati, per effetto di una *pressione dell'etere* il cui lavoro è proporzionale alla variazione di volume dell'elettrone.

2) Tutte le *forze* sono *di origine elettro-magnetica*.

3) Le *misure* che si fanno entro un sistema in movimento sono *relative* alle dimensioni degli istrumenti, alle forze prese come termine di confronto, ed al *tempo locale*.

S'immagini il *tempo vero* t definito rispetto ad un osservatore fisso, legato all'etere; un osservatore trasportato nel moto della materia, il quale comunichi col primo mediante segnali ottici (o elettrici ecc.), adotta una misura del tempo τ, dove

$$\tau = at + b$$

(cfr. cap. V, § 8); a e b sono *costanti locali*, dipendenti la prima dalla velocità di traslazione (supposta uniforme) e la seconda anche dalla distanza dell'osservatore mobile dall'osservatore fisso.

La teoria esige che si consideri τ corrispondente alle indicazioni positive degli orologi in S, attesochè l'accordo di orologi diversi si stabilisce in S come se il tempo impiegato dalla luce per andare da un punto A ad un punto B sia indipendente dal verso del segmento AB, ciò che non vale più per riguardo al tempo vero, nelle ipotesi di Lorentz.

§ 29. **Etere e materia.**

La spiegazione del principio di relatività pei fenomeni elettro-magnetici, è stata messa dal POINCARÈ (l. c.) sotto una forma matematica suggestiva, che possiamo tradurre nel modo seguente:

[1] Cfr. i Proceedings dell'Accademia di Amsterdam, maggio 1904.
[2] Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Paris, juin 1905.

Si ponga a base della Geometria ed in ispecie della definizione della congruenza delle figure, il gruppo delle trasformazioni (*movimenti geometrici*) che corrispondono ad ipotetici movimenti dell'etere solidificato; allora il trasporto dei corpi solidi internamente ad un sistema materiale mobile S, le misure del tempo di propagazione della luce ecc., definiscono ugualmente entro S una medesima congruenza *apparente* delle figure, affetta dal moto di S rispetto all'etere; la quale esprime una relazione invariante, non più rispetto al gruppo dei movimenti geometrici, bensì rispetto ad un *nuovo gruppo di trasformazioni* (il gruppo dei movimenti *apparenti*, trasformati dei movimenti geometrici *reali* mediante una trasformazione di Lorentz).

In questo enunciato una nozione trascendente della congruenza si vede contrapposta a quella sperimentalmente definita; presa la prima come una *realtà metafisica*, la seconda come un'*apparenza fisica*!

Una simile conseguenza si riattacca alla rappresentazione di un *etere indipendente dalla materia*, posta a base della teoria.

Ma la critica tende ad emanciparci da una tale specie di assoluto; relegando l'ipotesi della fissità dell'etere fra quelle che non possono cadere neppure indirettamente sotto il controllo di esperienze possibili, si viene infatti a toglierle ogni significato, e a ravvisarvi soltanto un puro artificio.

Quest'artificio potrà sembrar comodo agli effetti della trattazione matematica, ma non si può negare che esso abbia anche un lato pericoloso, dappoichè ha potuto giustificare per qualche tempo dei dubbii che non avevano alcun fondamento di credibilità. Tuttavia non ci rammaricheremo troppo di questi dubbii che, affrontati apertamente, e prima di tutti dal fondatore della teoria, hanno dato origine ad un tentativo di unificazione delle forze, che si presenta come una seducente promessa per l'avvenire.

Vogliamo soltanto accennare alla via che, secondo il nostro punto di vista, dovrebbe eliminare a priori le questioni fittizie che derivano dal suaccennato artificio.

Si tratta di guadagnare una più soddisfacente rappresentazione dell'*etere*, la quale deve essere *relativa alla materia*.

Non bisogna dimenticare che l'etere è soltanto un intermediario dei rapporti fra i corpi materiali; perciò questi corpi sono effettivamente il *dato*, e da essi conviene muovere per *costruire* una rappresentazione dell'etere.

Ora i rapporti fra etere e materia vengono investigati nello studio dei varii modelli meccanici (§ 24), ma generalmente da un punto di vista opposto. Si presume dato un fluido con certe proprietà, immagine semplificata dei fluidi reali (p. es. un fluido omogeneo infinitamente compressibile, o analogo ad un solido, mobile o immobile ecc.) e si considera la materia come luogo di *punti singolari* di codesto fluido etereo; sia che i punti materiali sieno pensati come *vortici* o come punti di *torsione* ecc.

Speculazioni di questo genere stanno a significare il tentativo di cogliere *mediante analogie*, i rapporti fenomenici che si concepiscono connessi all'*insieme* dei corpi; il loro valore sta appunto nella veduta di una *solidarietà universale* di tutte le cose sensibili, contrapposta come correttrice alle intuizioni stesse della materia, cioè alle distinzioni di caratteri *interni* ed *esterni* che vi si connettono.

Ma ad esprimere la solidarietà del mondo sensibile, e a *correggere* le distinzioni astrattamente conseguite rispetto ad esso, ben difficilmente si potrà riuscire in modo adeguato mediante un modello preso a priori!

Non vi è quindi da stupirsi se anche i modelli ideati da uomini di genio rendono ben poco conto dei rapporti che si ha in vista di spiegare, e se teorie prescindenti da ogni modello meccanico riescono ugualmente allo scopo conoscitivo.

Noi domandiamo di *definire l'etere come qualcosa che tenga in ogni posto e in ogni istante di tutte le materie più o meno lontane*, sia p. es. come un insieme di particelle che emanano dai corpi materiali o si concentrano in essi; particelle i cui movimenti sono connessi ai fenomeni della materia e possono esser conosciuti, almeno nei loro effetti di media, per mezzo dei rapporti fisici fra i corpi.

Crediamo che una qualche rappresentazione unificatrice di questo genere non tarderà a sorgere nel campo della Fisica delle radiazioni, ove si considerano oggi come radicalmente distinte le radiazioni emissive (scariche di elettroni) e le vibratorie (non deviate da una forza magnetica); sarà in qualche modo il risorgimento di un'Ottica dell'emissione, radicalmente trasformata.

Senza arrestarci sulle difficoltà di un tale programma ci limitiamo a rilevare che la concezione dell'etere da noi domandata eliminerebbe a priori dalla Elettro-magnetica dei corpi in moto, le questioni fittizie che nascono dal prendere un sistema assoluto di riferimento. Si tratterebbe soltanto di sapere per ogni mezzo e per ogni ordine di fenomenti che vi si svolgano, quali sono le particelle eteree a cui debbonsi attribuire i fenomeni stessi; e se nei fenomeni di origine interna al mezzo si fanno intervenire soltanto le particelle che emanano dai corpi di questo, il principio di relatività resta assicurato a priori [1].

§ 30. **Dinamica dell'elettrone: radiazioni.**

Abbiamo accennato (§ 28) come la spiegazione del principio di relatività pei fenomeni elettro-magnetici sia stata ottenuta mercè i più recenti sviluppi della teoria degli elettroni, dai quali è scaturita una *Dinamica elettrica*.

Il punto di partenza della nuova dottrina è lo studio delle varie radia-

[1] A quest'ordine d'idee sembrano in qualche modo accostarsi le vedute più recentemente sviluppate da WALTER RITZ. Cfr. Rivista di Scienza « Scientia », v. VI, 1908. (*Aggiunta alla 2ª edizione*).

zioni deviate da un campo magnetico (raggi catodici, di BECQUEREL ecc.) che, per spiegarne le proprietà, si è indotti a riguardare come scariche di elettroni.

Se si accetta questa ipotesi (di Becquerel e di J. J. THOMSON), si ha nelle radiazioni suddette un esempio di corpi elettrizzati che si muovono con velocità enormi, poco inferiori a quella della luce; le velocità che si presentano nella Dinamica consueta sono in confronto piccolissime.

Per trattare il movimento degli elettroni nei raggi catodici ecc., occorre considerare che l'accelerazione o il ritardo di questo moto implica una corrente, la quale modifica il campo elettro-magnetico. Tenendo conto di questa modificazione vi è luogo a costituire una *Dinamica dell'elettrone*, i cui principii trovarono appunto nello studio dei raggi nominati un'applicazione ed una conferma (ABRAHAM, SCHWARZSCHILD, KAUFMANN ecc.).

L'equazione vettoriale del moto di un elettrone si può porre sotto una forma analoga all'equazione newtoniana del moto di un punto materiale. Scriviamo quest'ultima designando con m la massa del punto, con a_g l'accelerazione e con f_g la forza, di direzione g; si ha:

$$m\, a_g = f_g.$$

Ora al posto di m si deve sostituire un'espressione del tipo $m + m_g$ scrivendo dunque:

$$(m + m_g)\, a_g = f_g;$$

la quantità m_g che si aggiunge alla massa propria m dell'elettrone non è più una costante, ma dipende dalla forma geometrica dell'elettrone stesso, dalla sua carica elettrica, dalla grandezza e dalla direzione della velocità rispetto a g; essa ha ricevuto il nome di *massa elettromagnetica*.

Applichiamo l'equazione anzidetta al caso dei raggi considerati come scariche di elettroni negativi.

Una forza elettrica o magnetica devia codesti raggi, e dalla deviazione ottenuta, dal calcolo della carica trasportata e del calore svolto, si può desumere in varii modi una misura della massa complessiva $m + m_g$. Pei raggi la cui velocità si avvicina ad un decimo di quella della luce, si trova che tale massa è circa un migliaio di volte più piccola di quella dell'atomo di idrogeno.

Ma per raggi catodici con grandi differenze di potenziale tra gli elettrodi, dotati di velocità che salgono fino ai $^9/_{10}$ di quella della luce, Kaufmann ha trovato masse molto superiori.

I vari resultati sperimentali si lasciano bene rappresentare supponendo che la massa elettro-magnetica m_g prevalga grandemente su m, ed anche prendendo $m = o$. In tale ipotesi la massa di un elettrone è puramente elettro-

magnetica, cioè la produzione delle *forze d'inerzia*, che occorrono per accelerare il moto di un elettrone o sono generate dal ritardarlo, *si spiega come un fenomeno elettro-magnetico* [1].

§ 31. **Dinamica elettrica.**

La Dinamica dell'elettrone conduce ad una *spiegazione* della Dinamica newtoniana, la quale si presenta come una teoria approssimata dei movimenti con velocità piccole (WIEN, 1901).

Poniamo dapprima che un punto materiale possa riguardarsi come un elettrone, e consideriamo p. es. la massa elettro-magnetica m_1 di questo nella direzione del movimento (*massa longitudinale*). Designando con V la velocità della luce, con v la velocità dell'elettrone, con e la sua carica, con r il suo raggio (preso l'elettrone come sferico), si ha

$$m_1 = m_0 \left\{ 1 + \frac{6}{5} \frac{v^2}{V^2} + \dots \right\}$$

$$m_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{V^2 r}.$$

Analogamente la *massa trasversale* dell'elettrone (relativa alla direzione perpendicolare alla prima) si sviluppa mediante una serie procedente per le potenze di $\frac{v}{V}$, il cui primo termine è sempre m_0.

Si deduce quindi che *se la v è piccola in confronto a V, la massa elettro-magnetica dell'elettrone si riduce sensibilmente alla costante m_0.*

Ciò significa appunto che, per velocità piccole, vale in via approssimativa come legge del moto dell'elettrone la legge newtoniana.

Ora dalla Dinamica dell'elettrone si passa ad una nuova Dinamica elettrica dei corpi, mercè alcune ipotesi sulla costituzione della materia e sulle forze; si è quindi condotti ad estendere la spiegazione elettrica della legge newtoniana del moto al caso di un punto materiale, che invero non può più essere riguardato come un elettrone unico, ma si presenta invece come un aggregato di elettroni.

Una *teoria elettrica* della materia è stata sviluppata dal LODGE (1902); essa consiste nel ritenere l'atomo costituito da un sistema di elettroni positivi e di elettroni negativi, questi ultimi moventisi intorno ai primi come satelliti.

[1] Per una critica della Dinamica degli elettroni cfr. T LEVI-CIVITA, Rivista di Scienza « Scientia », V. IV, 1907. Per la generale Dinamica elettrica vedi gli articoli di C. FABRY nella stessa Rivista nn. IV, V (1907, 1908). (*Aggiunta alla 2ª edizione*).

Tale determinazione del modello risulta dal confronto delle varie radiazioni, in ispecie dalle differenze fra i raggi di elettroni negativi e i raggi di elettroni positivi (raggi canali, raggi α del radio).

La teoria elettrica della materia conduce ad una *teoria elettrica delle forze*. Le forze interne della materia (elastiche, chimiche ecc.) vengono rappresentate come resultanti dalle azioni che si esercitano fra gli elettroni costituenti; la gravitazione ammette pure, come diremo, una spiegazione elettrica.

Si deduce quindi che le leggi del moto di un corpo, riguardato come punto materiale, sono le stesse che reggono il moto di un elettrone; cioè il movimento è rappresentato dall'equazione vettoriale

$$f_g = m_g \, a_g ,$$

che è, *nella forma*, analoga all'equazione newtoniana, ma dove la *massa elettromagnetica* m_g non è più una costante, bensì dipende dalla velocità e dalla direzione del moto rispetto a quella g della forza.

Ora m_g è la somma dei vettori corrispondenti agli elettroni che costituiscono il corpo (punto materiale) in moto, e dipende quindi:

1) Dai movimenti *interni* degli elettroni negli atomi o nelle molecole.

Non si può dire che le velocità di questi movimenti sieno trascurabili di fronte a quella della luce, giacchè accade di fare l'ipotesi che esse sieno notevolmente superiori alle velocità dei moti consueti. Ma se le dimensioni della particella di materia sono grandi rispetto a quelle dell'elettrone, la massa elettro-magnetica totale che corrisponde ai suddetti moti interni proviene da un computo di media e può quindi ritenersi come una costante.

2) Dal movimento *esterno* o visibile della particella materiale.

Ma trattandosi di velocità piccole rispetto alla velocità della luce, questo moto esterno non modifica sensibilmente la massa elettro-magnetica.

In definitiva dunque m_g può ritenersi come una costante, cioè: *per velocità relativamente piccole le leggi del moto della Dinamica elettrica trovano un'espressione approssimata nelle leggi della Dinamica newtoniana.*

Questa conclusione è molto interessante. Essa rappresenta una inversione nel problema classico della filosofia meccanica. *In luogo di spiegare i fenomeni elettro-magnetici con un modello meccanico, si riesce a porgere un modello elettrico della Meccanica stessa, il quale implica anzi una presunta correzione di questa.*

Tale è il resultato a cui fa capo il tentativo più progredito di unificare le forze, nell'ordine delle idee newtoniane: ne esce fuori una *Dinamica non newtoniana* da cui le leggi classiche derivano come caso limite!

§ 32. Spiegazione elettrica della gravitazione.

Approfondiremo più avanti il significato di questo sviluppo induttivo della Dinamica. Vediamo intanto le conseguenze positive che ne scaturiscono per la teoria della gravitazione, in rapporto all'Astronomia planetaria.

Riprendendo un'idea di MOSSOTTI, LORENTZ (1900) ha fatto l'ipotesi che l'attrazione newtoniana fra i corpi si spieghi come resultante delle azioni fra gli elettroni in essi contenuti; basta perciò ammettere una piccola differenza fra l'attrazione e la repulsione che una carica elettrica esercita su due altre equivalenti di nome contrario.

La teoria elettrica della materia suffraga l'ipotesi.

Ora da questa deriva la conseguenza che la gravitazione si deve propagare colla velocità della luce, e ciò sembra contraddire le conclusioni di LAPLACE e di LÉHMAN FILHÈS (cfr. cap. V § 29).

Ma per questi autori il tempo di propagazione della gravità era la sola ipotesi correttrice introdotta.

Invece POINCARÈ tenendo conto delle altre piccole correzioni, in rapporto alle ipotesi della Dinamica elettrica sopra accennate, annunzia [1] essere giunto a riconoscere un certo compenso, per cui la divergenza della legge newtoniana invece di essere dell'ordine dell'aberrazione astronomica (come nei calcoli di Laplace) diventa dell'ordine del quadrato di essa.

Appare dunque possibile che il propagarsi della gravitazione colla velocità della luce si concilii colle osservazioni astronomiche.

È ciò che proseguite ricerche dovranno dirci.

Se in ispecie da queste emerga una correzione dei piccoli scarti della teoria newtoniana (cap. V § 29), le ipotesi della Dinamica elettrica ne saranno raffermate [2].

§ 33. Conclusioni: generale Dinamica non-newtoniana.

Raffrontiamo gli sviluppi trattati nei precedenti paragrafi, e vediamo quali conclusioni ne risultino per riguardo ad una verificazione più precisa della Meccanica o ad una correzione di questa.

L'idea direttrice di proseguire lo studio della Fisica come estensione della Dinamica, si trova fino ad un certo punto giustificata a posteriori dal successo delle previsioni deduttivamente stabilite, sulla base di osservazioni ed esperienze che porgono nei varii dominii le ipotesi complementari.

[1] Comptes rendus, l. c.

[2] Il calcolo conduce invero ad una perturbazione del moto del perifelio di Mercurio che procede nel senso dato dall'osservazione effettiva, ma non spiega che una piccola parte del fenomeno reale. Per la critica delle teorie della gravitazione cfr. il più recente articolo di WALTER RITZ, Rivista di Scienza « Scientia », n. X, 1909. (*Aggiunta alla 2ª edizione*).

Tuttavia il successo non è completo, e tutto sommato si deve constatare che :

1) Le conclusioni verificate hanno spesso una generalità maggiore delle premesse, sicchè non valgono a fornire una dimostrazione delle ipotesi della Meccanica classica più precisa di quella che si desume dalle osservazioni ed esperienze dirette (§ 16).

2) La spiegazione meccanica di alcuni fenomeni esige l'aggiunta di considerazioni di media e di limite (§ 15).

3) Altri fenomeni sfuggono alla previsione della teoria meccanica, e non possono accomodarvisi se non a patto di accettare delle ipotesi un po' artificiose e non bene determinate, tali, p. es. : i fenomeni d'isteresi (§ 12).

4) Infine taluni fenomeni ottici o elettro-magnetici sembrano condurre ad una diretta contraddizione dei principii della Meccanica classica, ed in ispecie del principio newtoniano d'azione e reazione (§ 27).

Emerge quindi la conclusione che :

La Fisica, anzichè porgere una verifica più precisa della Meccanica classica, conduce piuttosto a correggere i principii di questa scienza, presi a priori come rigorosi.

E risulta anzi che la correzione portata dall' Ottica elettro - magnetica investe il *principio d'inerzia generalizzato*, mercè cui il principio newtoniano d'azione e reazione si deduce da una simmetria statica (cap. V, § 22).

Ora si tratta di vedere quale tipo d'ipotesi possa venir sostituita a codesto principio in una generale *Dinamica non-newtoniana*, ove si tengano fermi i postulati implicitamente contenuti nei concetti fondamentali e le leggi dell'equilibrio e del moto incipiente (cfr. cap. V, § 23). Si tratta quindi di riattaccare a questo quadro le correzioni che si sono presentate innanzi (§§ 12, 31) ed in ispecie di mostrare come la Dinamica elettrica si riduca appunto ad una determinazione particolare dell'ipotesi non-newtoniana.

Cerchiamo di renderci conto della modificazione che s'introduce nelle vedute classiche, quando si lasci cadere il principio di inerzia generalizzato, e perciò riferiamoci ad un caso schematicamente semplice.

Più corpi A, B, C.... immobili rispetto alle direzioni delle stelle, definiscano un campo di forze entro una certa regione spaziale S.

Ciò significa che portando un punto materiale P in una posizione qualunque di S si deve esercitare una forza nota per tenerlo fermo, forza che per generalità potremo supporre dipendere dalla massa m di P.

Immaginiamo d'imprimere a P un impulso; il moto di P si continua sotto l'azione dell'impulso iniziale e della forza definita come sopra per ogni posizione di S; il principio d'inerzia generalizzato permette di *sommare* semplicemente queste due circostanze determinanti, ossia di sommare quelle che risultano

definite per ogni istante: la velocità di P in quell'istante e la forza che compete a P per la sua posizione *attuale*.

In definitiva la previsione del moto futuro di P viene dedotta dal sovrapporre la conoscenza di queste circostanze determinanti:

1) caratteri *interni* di P, cioè la sua massa;

2) circostanze *esterne* al moto di P, cioè il campo di forze definito da A, B, C....;

3) un semplice *carattere di relazione* fra P ed A, B, C...., cioè la *velocità* di P rispetto a quei corpi, nell'istante dato.

Tali circostanze definiscono lo *stato attuale* del fenomeno di *movimento di un punto isolato*, e lo *stato futuro dipende dallo stato attuale e non dagli stati precedenti* (cfr. § 12).

Questa ipotesi di *non eredità* corrisponde al principio d'inerzia generalizzato. Essa implica in particolare che *il campo* S *non venga modificato dal moto di* P, almeno in questo senso: la *presenza* di P in S modifica il campo di forze definito dai corpi A, B, C..., cioè muta il resultato delle esperienze che si effettuino sopra altri punti tenuti fermi in S; ma *questa modificazione essendo pensata come istantanea* non si ha da tenerne conto nello studio del moto di P stesso, cioè la *presenza di P nel campo ad un istante anteriore non modifica la forza che agisce su P nella sua posizione attuale*.

Ora lasciamo cadere il principio d'inerzia generalizzato, e (conservando gli altri concetti e principii della Meccanica) cerchiamo di riconoscere il tipo generale di un'*ipotesi non-newtoniana*, da assumere, al posto del principio abbandonato, come determinatrice del moto.

Questa ipotesi potrà far dipendere il moto futuro di P da tutti gli stati precedenti, cioè prendere la forma di una *ipotesi d'eredità*; ma se si vuole una rappresentazione dei fatti per mezzo di cause elementari (cap. II, § 33), bisogna ammettere che codesti stati abbiano indotto per contiguità delle modificazioni che possiamo riconoscere attualmente nel campo.

In questo modo all'*ipotesi di eredità* si sostituisce una *ipotesi di solidarietà* del campo:

Se un punto isolato P *si muove in un campo* S, *rispetto ai corpi immobili* A, B, C...., *che si ritengono come circostanze determinanti del moto, il suo movimento futuro dipende dalla sua massa, dalla sua posizione, dalla sua velocità attuale, e dalle forze che nell'istante attuale potrebbero essere virtualmente determinate con esplorazioni del campo; tali forze dipendono alla lor volta non soltanto da* A, B, C...., *ma anche dal precedente moto di* P, *come se* P *non fosse isolato ma contenuto in un mezzo che si muova con esso.*

La rappresentazione di questo mezzo fittizio che contraddice le circostanze sperimentali assunte nell'ipotesi di *isolamento* (ambiente vuoto) sta a significare che non possonsi distinguere per astrazione le circostanze determinanti *interne*

ed *esterne* nei fenomeni di moto, e riesce infine ad esprimere un'ipotesi di solidarietà di tutte le cose sensibili.

Gli sviluppi della Meccanica energetica e quelli dell'Ottica elettro-magnetica ci famigliarizzano, per due vie diverse, con una simile veduta; ma a nostro avviso si oltrepassa la misura quando si vogliono sopprimere le distinzioni che si riattaccano al concetto primitivamente dato della materia (cfr. §§ 17, 19). piuttosto che ritenerle come una prima approssimazione necessaria nello sviluppo delle conoscenze, la quale deve essere progressivamente corretta per integrazioni successive.

Emerge dalla critica precedente che se si lascia cadere il principio d'inerzia generalizzato, vi è luogo a costruire una generale Dinamica non-newtoniana dove si estenda l'osservazione dei dati determinanti il moto

1) o nel tempo, con una *ipotesi d'eredità*;

2) o nello spazio, con una *ipotesi di solidarietà*, che può essere sostituita alla prima.

Le alterazioni permanenti dei corpi elastici (fenomeni d'isteresi elastica) ci avevano suggerito l'ipotesi 1); i fenomeni ottico-elettro-magnetici ci hanno porto la veduta 2), la quale è atta a render conto dell'*eredità apparente* che si riscontra p. es. nella isteresi magnetica, poichè basta postulare una modificazione dell'etere circostante.

Ora importa rilevare più esplicitamente che:

La Dinamica elettrica è una determinazione particolare della dinamica non-newtoniana, che nasce dal sostituire il principio di inerzia generalizzato con un'ipotesi di solidarietà del campo di moto, lasciando *fermi i principii dell'equilibrio e del moto incipiente*.

Infatti abbiamo avvertito (con WIEN) che le leggi della Dinamica elettrica porgono approssimativamente quelle della Dinamica newtoniana, e l'approssimazione è tanto maggiore quanto più piccola è la velocità del mobile, sicchè le leggi dell'equilibrio e del moto incipiente risultano esatte.

La circostanza che le ipotesi della Dinamica elettrica conducano alla validità approssimativa della Dinamica newtoniana, non dipende del resto dalla particolare determinazione di quelle ipotesi.

Infatti se riprendiamo in generale l'ipotesi di solidarietà del campo di movimento di un punto P, vediamo che questa c'induce a ritenere una progressiva *variazione locale del campo* (dipendente dal moto di P ecc), la quale *si propaghi con una certa velocità* v.

Il principio d'inerzia generalizzato corrisponde a prendere $v = \infty$, e questa posizione può assumersi senza errore apprezzabile, tutte le volte che la velocità di P sia *abbastanza piccola rispetto a* v.

Il grado di piccolezza non può essere fissato a priori, poichè esso dipende fra l'altro dal *sistema di riferimento* del moto.

Il principio d'inerzia è già verificato con buona approssimazione, per velocità assai piccole, nella Dinamica terrestre; ma la approssimazione è migliore e si riscontra anche per velocità più grandi quando si riferisca il moto ad un sistema di direzioni astronomicamente fisse. Ciò racchiude in qualche modo una veduta della solidarietà universale, di cui la Dinamica newtoniana era stata già costretta a tener conto.

Da quanto precede trarremo le conclusioni seguenti:

Gli sviluppi della filosofia meccanica rappresentano il tentativo di *spiegare* la Fisica, ravvisandovi la verificazione delle *ipotesi* fondamentali di una *Meccanica*, assunta come *generale e rigorosa*.

Le deduzioni e le esperienze proseguite durante due secoli, sembrano all'opposto invalidare una di quelle ipotesi, e lasciano pensare che alla Meccanica newtoniana debba surrogarsi una Meccanica non-newtoniana nella quale si ritengano le leggi dell'equilibrio e del moto incipiente. Le recenti teorie elettro-magnetiche vorrebbero anzi determinare l'ipotesi complementare della nuova Dinamica; ma a prescindere da questa determinazione *vi è luogo a ritenere che il principio d'inerzia generalizzato abbia una validità approssimata tanto più precisa quanto più piccola è la velocità del movimento rispetto alla velocità della luce*.

Ed è a nostro avviso interessante il riconoscere come parte più ferma della Meccanica, quella che rappresenta insomma « *la parte comune a tutte le Meccaniche relative a sistemi di riferimento qualsiansi* » [1].

§ 34. **Spiegazione fisica: valore dei modelli meccanici e delle equazioni.**

Dagli sviluppi dei precedenti paragrafi abbiamo già tratto un primo ordine di conclusioni in rapporto alla verificazione della Dinamica; ne deduciamo ora altre conclusioni riferentisi al *valore dei modelli meccanici* e al senso delle *spiegazioni* nella Fisica.

Dobbiamo perciò riattaccarci a quanto fu detto in principio di questo capitolo.

L'ipotesi di un invisibile sostrato meccanico dei fenomeni fisici si può interpretare positivamente come un *processo d'associazione e d'astrazione* che fa capo ad una rappresentazione dei rapporti fenomenici mediante i *rapporti quantitativi* di certi dati, cioè mediante le *equazioni* determinatrici dei fenomeni.

Abbiamo scorto del resto due indirizzi di spiegazione, dove si assumono come dati elementari del supposto fenomeno dinamico i « legami » o all'op-

[1] Posteriormente alla prima edizione di quest'opera abbiamo riassunto le nostre vedute intorno al principio d'inerzia e alle Dinamiche non-newtoniane in un articolo inserito nel n. II della *Rivista di Scienza*, 1907.

posto le « forze », e si tende a ridurre gli uni agli altri. Questi due indirizzi che si riattaccano ai nomi di DESCARTES e di NEWTON, s'intrecciano e si alternano nel progresso scientifico di cui abbiamo tentato di ricostruire il quadro, e convergono in una più intima associazione dei dati sensibili ed in un riavvicinamento delle immagini, onde da una parte si allarga il concetto dei legami, e dall'altra si unificano le forze in un tipo, p. es. elastico o elettrico.

Ma nel contrasto fra la tendenza cartesiana e la newtoniana si riconosce non soltanto un criterio di scelta delle immagini primitive, ottiche o tattili-muscolari, bensì anche una disposizione a valutare diversamente il *momento genetico associativo* ed il *momento attuale astratto* della rappresentazione mediante rapporti di quantità.

Sotto questo aspetto, le due tendenze appariscono oggi più lontane che mai, imperocchè le tesi più radicali vengono ugualmente sostenute, sia che « la *spiegazione* fisica consista nel *modello meccanico* », sia all'opposto che « essa consista nelle *equazioni* determinatrici, *all'infuori di ogni modello* ».

Questa differenza nel modo d'intendere la « spiegazione fisica » viene riattaccata di solito alla differenza psicologica che separa gli spiriti *immaginativi* ed i *logici*; ma vi è di più una diversità di ufficio dei due tipi di spiegazione per riguardo a due momenti del progresso scientifico, cioè allo sviluppo propriamente inventivo che gl'immaginativi soprattutto promuovono, e alla sistemazione della Scienza acquisita di cui i logici hanno ad occuparsi.

Il correlativo di « spiegare », cioè « comprendere », significa per gli uni e per gli altri essere abilitati a *certe previsioni*, ma queste non si aggirano ugualmente per tutti nel medesimo campo.

Ora è evidente che la *spiegazione sintetica*, cui corrisponde il massimo di comprensione, risulterà da un coordinamento critico dei varii tipi di spiegazione, che porga non soltanto la somma delle varie previsioni richiedibili, ma anche un'adeguata conoscenza dei rapporti fra i campi differenti a cui esse si riferiscono.

Illustriamo questo concetto, sviluppando sotto forma di tesi ed antitesi le due vedute relative al valore conoscitivo ed euristico delle equazioni e dei modelli.

Tesi. La possibilità di fornire un modello meccanico per un gruppo di fenomeni A, importa che i dati misurabili di questi possano essere ad ogni momento determinati, una volta fissati i parametri arbitrarii.

Il *valore conoscitivo* del modello sta dunque *nelle equazioni* che permettono codesta determinazione, equazioni resultanti ugualmente, come *parte comune*, dai *varii modelli possibili*.

Qui è da osservare una differenza essenziale fra due casi :

1) Le equazioni possono risultare effettivamente indipendenti da ogni modello, in quanto leghino i dati stessi di cui si domanda la variazione. In

questo caso il modello ha servito soltanto d'intermediario per stabilire alcune *associazioni tra i fenomeni*, nelle quali è il *contenuto positivo* della teoria. Esempio: la teoria elettro-magnetica di HERTZ (§ 23).

2) All'opposto le quantità legate nelle equazioni possono riferirsi non direttamente ai dati fenomenici, ma alle immagini. In questo caso le equazioni stesse non esprimono più il contenuto positivo della teoria e neppure la parte comune a *tutti* i modelli possibili, ma soltanto *le condizioni comuni di una serie di modelli*. Ravvisiamo questo caso nella Ottica ondulatoria di FRESNEL; le equazioni fondamentali si ottengono qui ugualmente mediante poche ipotesi generali, all'infuori di una particolare determinazione del mezzo elastico vibrante ([1]), ma resta sempre che in esse non si ravvisano direttamente rapporti positivi, poichè la loro interpretazione è legata al modello.

Antitesi. Un modello meccanico relativo ad un gruppo di fenomeni A, prolunga le sensazioni in una visione immaginativa di essi, e suggerisce quindi la scoperta di nuovi rapporti:

1) fra gli stessi dati di A,

2) o fra questi ed altri dati fenomenici di un gruppo più esteso.

A questo titolo il *valore euristico* dei modelli meccanici adeguati ad A, risiede propriamente in certi caratteri suggestivi delle immagini, nella diversa possibilità estensiva, ed in generale *nelle differenze dei modelli* suddetti.

Si raffrontino ad esempio l'Ottica ondulatoria e l'Ottica elettro-magnetica: il modello elastico, per analogia col suono, suggerisce più presto la scoperta del principio di DÖPPLER; il modello elettro-magnetico, che equivale al precedente per mezzi non dotati di conducibilità elettrica o di permeabilità magnetica, lascia invece prevedere nuovi rapporti fra corpi conduttori ed opachi (MAXWELL) o fra i fenomeni luminosi e la magnetizzazione del campo (LORENTZ-ZEEMAN).

Come conclusione riteniamo che i due modi di *spiegare* i fenomeni fisici, per mezzo di equazioni o di modelli, rispondano a due forme diverse di conoscenza, le quali sono da integrare l'una coll'altra. La prima (almeno nel caso tipico di equazioni aventi un senso positivo) contiene per così dire un *gruppo chiuso di previsioni precise*; la seconda un *gruppo di previsioni* non più determinate a priori, ma *estendibili*.

Pertanto chi voglia veramente *comprendere una teoria fisica*, nel più alto senso della parola, deve percorrerne in ambo i versi il processo, cioè

1) ricostruire induttivamente le associazioni ed astrazioni generatrici dei concetti, e discriminare le ipotesi in essi contenute, di cui parte esprimono la corrispondenza fra certe differenze qualitative e certi rapporti quantitativi, e

([1]) Cfr. p. es. VOIGT: « Kompendium der theoretischer Physic », Bd. II, p. 554 e seg.

parte determinano questi ultimi rapporti mediante le equazioni fondamentali della teoria;

2) svolgere deduttivamente l'*interpretazione* di queste equazioni, cioè riconoscere come esse porgano i varii dati fenomenici in funzione di alcune circostanze determinanti, il che esige soprattutto di *integrare mercè le ipotesi complementari* la conoscenza dei rapporti quantitativi con quella dei rapporti qualitativi corrispondenti. (Si ha un semplice esempio di questa integrazione nell' ipotesi fondamentale dell' Ottica elettro - magnetica : le stesse equazioni vengono interpretate come rispondenti ora ad oscillazioni elettro-magnetiche proprie constatabili mediante un risonatore hertziano o un coherer, ora a radiazioni luminose o calorifiche ecc. a seconda della grandezza di quell'elemento che ci rappresentiamo come una « lunghezza d'onda »).

Ora per chi abbia penetrato lo spirito di un tal modo di comprendere, riesce evidente che il punto centrale è una *veduta sintetica dei rapporti generali attraverso uno schema semplificato, dove si faccia astrazione dai particolari tecnici delle esperienze e dagli sviluppi di calcolo.*

Sarebbe estremamente desiderabile che coloro i quali trattano problemi di Fisica teorica avessero sempre cura di mettere in vista quest'aspetto sintetico delle spiegazioni prima ed all'infuori dei particolari delle esperienze o dei calcoli. Le trattazioni troppo analitiche non formeranno ostacolo a pochi spiriti superiori che riusciranno in qualunque modo a trarne fuori la sintesi; ma forse il voto che c'ispira la nostra debolezza può trovare accoglienza presso il maggior numero.

B - L'ipotesi meccanica e i fenomeni della vita.

§ 35. Introduzione.

Il modo di comprendere la « spiegazione meccanica » come « modello », non toglie valore alla tendenza unificatrice delle rappresentazioni parziali dei fenomeni, la quale mira ad un progresso estensivo della Scienza.

Tutti i problemi effettivi suscitati dalla filosofia meccanica possono quindi essere ripresi in esame nella loro nuova posizione scientifica. E pur venendo messo da parte il concetto trascendente della universalità del meccanismo, resta ancora aperto il discutere intorno ai limiti che esso *potrebbe* raggiungere.

Ora, per ciò che si riferisce alla spiegazione meccanica nella Fisica, si tratta soltanto di sapere fino a che punto sieno da tener fermi i principii classici della Dinamica newtoniana, ma in un senso generale è da ammettere che un tale modo di spiegazione sia ricevibile, che almeno possa ritenersi lo spirito del determinismo meccanico : riguardare i dati della realtà fisica futura come

suscettibili di previsione, mercè relazioni quantitative che risultano determinate da alcune circostanze caratteristiche del presente o del passato.

Il proposito di proseguire quest'ordine di considerazioni, estendendo la spiegazione meccanica ai fenomeni della vita, dà luogo invece a discutere alcuni problemi pregiudiziali su cui vogliamo brevemente intrattenerci.

Diciamo anzitutto della *possibilità* di una spiegazione siffatta, e poi del suo *valore*, ossia della *utilità* scientifica che può derivarne.

La questione della possibilità di fornire (nel più largo senso) un modello meccanico pei fenomeni della vita, ci conduce a :

1) Sgombrare il terreno da alcune vacue *obiezioni preliminari*.

2) Esaminare le questioni connesse al *determinismo biologico*, ed in ispecie il contrasto

a) fra *determinismo psicologico* e *libero arbitrio* ;

b) e fra *fisicismo* e *spiegazione teleologica*.

3) Riconoscere se nei fenomeni della vita si trovino *verificati i principii generali della Fisica* che seguono dall'ipotesi di un meccanismo.

§ 36. **Obiezioni preliminari.**

Contro all'ipotesi meccanica in Biologia si adducono anzitutto come argomenti alcune frasi fatte, di cui è opportuno denunziare la vacuità.

Si oppone p. es. la *spontaneità*, il *cambiamento* di tutto ciò che vive, all'*inerzia*, alla *immutabilità* della *materia*, e dall'antagonismo delle immagini evocate con queste parole si pretende trarre una irriducibile contraddizione.

Ora, se la « spontaneità » è qui presa come « attività » o « possibilità di cambiamento per condizioni interne », si deve dire che l'immagine di una materia assolutamente passiva non risponde affatto al concetto portato da un coordinamento dei varii rapporti fisici, dove la materia si manifesta sempre come un insieme di energie. In questo senso sembra assai più adeguata la veduta che tutto intorno a noi è vivente ed attivo, salvo una differenza di grado, nell'intensità o nella rapidità del mutamento, e nella relativa importanza dei *fattori interni* ed *esterni* sul corso dei fenomeni.

Ma le obiezioni suindicate, ed altre analoghe, muovono evidentemente da ragioni *sentimentali*.

La vita non è data a noi soltanto come oggetto di rappresentazione; le previsioni che vi si collegano suscitano nello spirito nostro il timore o il desiderio, corrispondono a fini voluti o disvoluti.

Ebbene l'ipotesi meccanica è incapace di *spiegare* i sentimenti associati alla rappresentazione di ciò che vive, o di suggerire una norma alla volontà; peggio ancora quella ipotesi sembra contraddire ai sentimenti suddetti con una veduta deterministica dei fatti psicologici, che esamineremo più avanti.

Che valore hanno queste ragioni di sentimento?

parte determinano questi ultimi rapporti mediante le equazioni fondamentali della teoria;

2) svolgere deduttivamente l'*interpretazione* di queste equazioni, cioè riconoscere come esse porgano i varii dati fenomenici in funzione di alcune circostanze determinanti, il che esige soprattutto di *integrare mercè le ipotesi complementari* la conoscenza dei rapporti quantitativi con quella dei rapporti qualitativi corrispondenti. (Si ha un semplice esempio di questa integrazione nell' ipotesi fondamentale dell' Ottica elettro - magnetica : le stesse equazioni vengono interpretate come rispondenti ora ad oscillazioni elettro-magnetiche proprie constatabili mediante un risonatore hertziano o un coherer, ora a radiazioni luminose o calorifiche ecc. a seconda della grandezza di quell'elemento che ci rappresentiamo come una « lunghezza d'onda »).

Ora per chi abbia penetrato lo spirito di un tal modo di comprendere, riesce evidente che il punto centrale è una *veduta sintetica dei rapporti generali attraverso uno schema semplificato, dove si faccia astrazione dai particolari tecnici delle esperienze e dagli sviluppi di calcolo.*

Sarebbe estremamente desiderabile che coloro i quali trattano problemi di Fisica teorica avessero sempre cura di mettere in vista quest'aspetto sintetico delle spiegazioni prima ed all'infuori dei particolari delle esperienze o dei calcoli. Le trattazioni troppo analitiche non formeranno ostacolo a pochi spiriti superiori che riusciranno in qualunque modo a trarne fuori la sintesi; ma forse il voto che c'ispira la nostra debolezza può trovare accoglienza presso il maggior numero.

B - L'ipotesi meccanica e i fenomeni della vita.

§ 35. Introduzione.

Il modo di comprendere la « spiegazione meccanica » come « modello », non toglie valore alla tendenza unificatrice delle rappresentazioni parziali dei fenomeni, la quale mira ad un progresso estensivo della Scienza.

Tutti i problemi effettivi suscitati dalla filosofia meccanica possono quindi essere ripresi in esame nella loro nuova posizione scientifica. E pur venendo messo da parte il concetto trascendente della universalità del meccanismo, resta ancora aperto il discutere intorno ai limiti che esso *potrebbe* raggiungere.

Ora, per ciò che si riferisce alla spiegazione meccanica nella Fisica, si tratta soltanto di sapere fino a che punto sieno da tener fermi i principii classici della Dinamica newtoniana, ma in un senso generale è da ammettere che un tale modo di spiegazione sia ricevibile, che almeno possa ritenersi lo spirito del determinismo meccanico : riguardare i dati della realtà fisica futura come

suscettibili di previsione, mercè relazioni quantitative che risultano determinate da alcune circostanze caratteristiche del presente o del passato.

Il proposito di proseguire quest'ordine di considerazioni, estendendo la spiegazione meccanica ai fenomeni della vita, dà luogo invece a discutere alcuni problemi pregiudiziali su cui vogliamo brevemente intrattenerci.

Diciamo anzitutto della *possibilità* di una spiegazione siffatta, e poi del suo *valore*, ossia della *utilità* scientifica che può derivarne.

La questione della possibilità di fornire (nel più largo senso) un modello meccanico pei fenomeni della vita, ci conduce a:

1) Sgombrare il terreno da alcune vacue *obiezioni preliminari*.

2) Esaminare le questioni connesse al *determinismo biologico*, ed in ispecie il contrasto

a) fra *determinismo psicologico* e *libero arbitrio*:

b) e fra *fisicismo* e *spiegazione teleologica*.

3) Riconoscere se nei fenomeni della vita si trovino *verificati i principii generali della Fisica* che seguono dall'ipotesi di un meccanismo.

§ 36. **Obiezioni preliminari.**

Contro all'ipotesi meccanica in Biologia si adducono anzitutto come argomenti alcune frasi fatte, di cui è opportuno denunziare la vacuità.

Si oppone p. es. la *spontaneità*, il *cambiamento* di tutto ciò che vive, all'*inerzia*, alla *immutabilità* della *materia*, e dall'antagonismo delle immagini evocate con queste parole si pretende trarre una irriducibile contraddizione.

Ora, se la « spontaneità » è qui presa come « attività » o « possibilità di cambiamento per condizioni interne », si deve dire che l'immagine di una materia assolutamente passiva non risponde affatto al concetto portato da un coordinamento dei varii rapporti fisici, dove la materia si manifesta sempre come un insieme di energie. In questo senso sembra assai più adeguata la veduta che tutto intorno a noi è vivente ed attivo, salvo una differenza di grado, nell'intensità o nella rapidità del mutamento, e nella relativa importanza dei *fattori interni* ed *esterni* sul corso dei fenomeni.

Ma le obiezioni suindicate, ed altre analoghe, muovono evidentemente da ragioni *sentimentali*.

La vita non è data a noi soltanto come oggetto di rappresentazione; le previsioni che vi si collegano suscitano nello spirito nostro il timore o il desiderio, corrispondono a fini voluti o disvoluti.

Ebbene l'ipotesi meccanica è incapace di *spiegare* i sentimenti associati alla rappresentazione di ciò che vive, o di suggerire una norma alla volontà; peggio ancora quella ipotesi sembra contraddire ai sentimenti suddetti con una veduta deterministica dei fatti psicologici, che esamineremo più avanti.

Che valore hanno queste ragioni di sentimento?

Rispondiamo senza esitazione: nessuna. Ma crediamo opportuno di giustificare tale risposta.

Fra il sapere da una parte, il sentire e il volere dall'altra, passa questo rapporto: Il sapere è indipendente dal sentimento e dalla volontà, poichè implica un rapporto ipotetico fra la volontà e la sensazione susseguente (Capitolo II). Il sentimento e la volontà sono alla lor volta indipendenti dal sapere; la Scienza non può modificare le emozioni che accompagnano gli oggetti conosciuti; essa non può dettar norma alla volontà se non in modo relativo, cioè dove si tratti dei mezzi, o dove si tratti di fini che vengano riconosciuti in contrasto con altri fini superiori, più fortemente voluti.

Ora, per chi comprenda chiaramente tali rapporti, è assurdo chiedere ad una teoria scientifica la spiegazione dei sentimenti, o pretendere che le immagini accolte come istrumento di previsione suscitino quei sentimenti stessi che accompagnano i fatti rappresentati.

Per conseguenza cade l'accennata obiezione pregiudiziale contro la possibilità dell'ipotesi meccanica sui fenomeni della vita. Questa ipotesi risponde ad un atteggiamento *contemplativo* dello spirito in cui si vuol prevedere, e si astrae dai sentimenti pei quali le previsioni richieste acquisteranno un *valore* relativamente ad un diverso atteggiamento (*attivo*) dello spirito stesso.

§ 37. **Determinismo biologico.**

Ma la previsione è possibile? O vi si oppone la « spontaneità » di ciò che vive?

Ecco un problema positivo che sorge dalle divergenze rappresentative sopra esaminate; è il problema del *determinismo biologico*.

Il senso di questo consiste invero nell'ammettere che ai fatti vitali « possano riferirsi *previsioni determinate* secondo l'ordine di coesistenza e di successione causale », e quindi che quelli possano formare oggetto di una conoscenza scientifica illimitatamente progrediente.

Ora il principio deterministico non può essere dimostrato a priori; esso esprime una supposizione generale che si giustifica ugualmente nei varii campi del sapere mercè il successo delle previsioni stabilite, cioè col progredire della Scienza.

Ma tra i fenomeni della vita ed i fenomeni fisici non vi è a questo riguardo alcuna differenza che non si possa spiegare colle condizioni complesse del fatto fisiologico, sia che si tratti di esseri viventi o anche semplicemente dei loro organi o tessuti.

L'apparente contraddizione di fenomeni diversi che si producono in circostanze sensibilmente *uguali*, si risolve con una discriminazione approfondita di queste.

Esempii luminosi in proposito trovansi esaminati e discussi da CLAUDE BERNARD nella sua « Introduction à la médecine expérimentale »; ai quali molti

altri ormai potrebbero aggiungersi, recati dai più recenti progressi delle scienze biologiche.

Vogliamo ricordarne uno solo altamente istruttivo, citando il resultato degli studii sulla *malaria* (LAVERAN, MARCHIAFAVA, GOLGI, ROSS, GRASSI, DIONISI, BIGNAMI e BASTIANELLI); il quale reca una confortante promessa che l'etiologia delle malattie abbia ad uscire da quella vaga oscurità di spiegazioni onde si è reso celebre il medico di MOLIÈRE.

§ 38. **Determinismo psicologico e libero arbitrio.**

Ma per verità il determinismo biologico non sarebbe seriamente contestato da alcuno, se dall'accoglierlo nel più largo senso come supposizione generale, non scaturisse la conseguenza che anche i fenomeni psicologici, ed in particolare il nostro pensiero e la nostra volontà, possano essere compresi ugualmente in un rapporto di determinazione causale.

Un sentimento di ripugnanza si connette a questa veduta; sentimento che si attenuerebbe invero se potessimo isolare dal mondo conosciuto la nostra propria persona, che sparirebbe infine del tutto se fosse possibile di escludere dalla conclusione l'uomo o gli animali superiori, per limitarla soltanto agli esseri inferiori della scala zoologica, tanto lontani da noi.

Al contrario una riflessione scientifica più matura ci vieta di separare così arbitrariamente ciò che appare congiunto in una serie continua. La nostra causa resta legata a quella dei vibrioni e delle amebe. Poichè si progredisce per gradi dalle infime forme della vita alle superiori, poichè anche i fenomeni dell'intelligenza si sviluppano insensibilmente dagli animali all'uomo, e poichè essi fan parte della vita come cause e come effetti, bisogna risolversi ad una scelta unica: o ammettere in tutta la sua estensione il determinismo biologico e psicologico, o negarlo e accettare l'idea della *spontaneità*, in un senso che esclude o limita a priori in questo dominio la *possibilità della previsione*.

Per dirimere la difficoltà, giova anzitutto considerare il così detto *problema del libero arbitrio*, distinguendo in esso la questione *scientifica* che concerne il determinismo psicologico degli atti umani, e la questione *morale* che si lega al giudizio di essi [1]. La sovrapposizione di quest'ultimo ordine di argomenti nel campo scientifico è una intrusione indebita, dalla quale dobbiamo emanciparci se vogliamo acquistare una veduta scientificamente serena.

Ma se ciò sia concesso, e si guardi soltanto ai fatti della volontà altrui, ogni oscurità è eliminata.

La domanda « se la volontà sia *determinata* dagli antecedenti », presa positivamente, significa soltanto questo « se le altrui deliberazioni sieno *preve-*

[1] Circa i rapporti della questione colle recenti teorie nel *diritto penale* vedasi MARIO CALDERONI: « I postulati della scienza positiva e il diritto penale », Firenze, Ramella, 1901.

dibili da chi conosca bene gli antecedenti del deliberante ». Ora, purchè si pongano fra questi antecedenti anche i sentimenti e la volontà della persona di cui si discute, la risposta affermativa non è dubbia.

Osservazioni dirette vengono in appoggio alla tesi deterministica, indipendentemente dai motivi generali che confermano il determinismo fisiologico; e ciò in modo tanto più sicuro quanto più si eliminino le cause d'errore, provenienti dall'incompleta conoscenza dei moventi che agiscono nello spirito altrui, e dalla complessità dei fatti, mutabili per piccolissime variazioni di codesti motivi.

All'intuizione della *ragionevolezza* delle azioni umane (cioè della loro dipendenza da motivi) che risulta dalle predette osservazioni, si aggiungono altri dati obiettivi, p. es. la *regolarità statistica* dei fatti sociali, così bene messa in luce dal QUÉTELET ecc.

Ma non giova insistere su codesti argomenti. Essi bastano certo, per chi abbia eliminato dalla sua mente ogni prevenzione d'ordine morale, a costituire nel loro insieme una *prova induttiva* del determinismo psicologico, o se si preferisce a giustificare anche in questo campo la fiducia in una possibile scienza, non diversa da quella che si riferisce a tutti gli altri ordini di fatti, da noi compresi come rapporti invariabili di coesistenza e di successione.

Se il determinismo psicologico solleva difficoltà, queste non provengono da ragioni di ordine scientifico.

Perchè dunque si ha repugnanza ad accoglierlo?

La risposta è chiara: Perchè la tesi deterministica sembra contraddire all'intuizione immediata che ciascuno ha della *libertà del proprio volere*. Perchè al concetto di questa « libertà » si legano le idee direttrici che stanno a base dei nostri apprezzamenti morali.

Importa dunque mostrare che, ove l'anzidetta intuizione dei fatti volontarii venga interpretata rettamente, *libertà e determinismo non si contraddicono*.

La tesi della volontà libera, secondo l'attestazione della nostra coscienza, afferma:

1) la possibilità che ogni uomo ha di *fare*, entro certi limiti, ciò che ha deliberato (*libertà fisica* o *esterna*);

2) la possibiltà ch'egli ha pure di agire, fino ad un certo punto, sul corso dei suoi pensieri e dei suoi sentimenti, e quindi di determinare o modificare le deliberazioni ulteriori, inibendo o esaltando l'azione dei motivi. Questa « libertà di *volere* », contrapposta alla « libertà di fare », costituisce la cosidetta *libertà morale* o *libertà interna*.

Essa ha, come la prima, una reale sussistenza. Da essa noi attingiamo la fiducia in noi stessi. In essa riponiamo il vero fondamento della nostra *responsabilità*, onde ci teniamo al massimo grado responsabili di quelle azioni che furono premeditatamente volute, come conseguenza di una matura deli-

berazione alla quale abbiamo subordinato una serie di atti, e quindi in connessione coi *caratteri permanenti* della nostra *personalità*. All'opposto invece crediamo di avere meno responsabilità nelle azioni improvvise, imputandoci tuttavia quanto ad esse, di non esserci premuniti contro il motivo sopravveniente (*tentazione*) coll'inibirne l'effetto sul nostro volere; per modo che questa responsabilità svanisce quasi ai nostri occhi se l'azione fu mossa da un motivo forte ed inaspettato.

Tutto ciò è perfettamente conforme al comun senso degli uomini e, come si è detto, è necessario alla vita pratica, che esige la fiducia nel nostro stesso volere.

Ma in tutto ciò non si trova nulla di contrario alla tesi deterministica della prevedibilità dei fatti volontarii. Contraddizioni apparenti si possono trarre soltanto da un modo di ragionare vizioso, affetto di trascendentalismo.

In due modi si fa entrare qualcosa di trascendente.

In primo luogo coll'applicare alla libertà del volere un vecchio argomento di LOCKE e di LEIBNIZ, che ha invero un significato originario diverso.

Se si concede un secondo grado di volizione, consistente nel « voler volere », si deve accordarne un terzo e poi un quarto e così via fino all'infinito.

Da questo infinito scaturisce per taluno un concetto trascendente della volontà che *determina sè stessa*, onde l'*arbitrium indifferentiae* per cui la previsione riesce impossibile. Ma l'argomento poggia sopra un equivoco.

Quando si dice che possiamo « voler volere », la volontà presa come soggetto, non è la stessa cosa della volontà formante oggetto della volizione. La volizione di secondo grado non implica dunque il non senso di una volontà che determina *sè stessa*, bensì il fatto psicologico che un atto del volere può venire subordinato ad un altro precedente. Ora, evidentemente questa subordinazione (che è del resto soggetta in parte alle contingenze esteriori) non può andar oltre un numero finito di gradi, dato il tempo richiesto dall'atto del volere. Non è dunque neppure il caso di discutere il precedente istrumento dialettico (preso in prestito dalla Teologia naturale) e di rilevare che da una serie *infinita* di cause non si può argomentare, senza contraddizione, ad una causa *prima* che sia *causa di sè stessa*.

Un altro modo di argomentare, in apparenza più profondo, introduce viziosamente un concetto trascendente della *personalità* umana. La frase « io posso fare e volere secondo mi piace, sia pure in contrasto coi motivi agenti sulle mie determinazioni » (1) esprime una rappresentazione della persona che agisce, come al di fuori della serie delle sue stesse volizioni.

Ora, se ad una frase siffatta si vuole accordare un senso intelligibile,

(1) Cfr. la disputa vivace descritta da A. HERZEN: « Le cerveau et l'activité cérébrale ». Paris, F. B. Baillière, 1887.

non vi è che un modo d'intenderla: l'io a cui piace fare e volere, non è altro che un'espressione continuativa della stessa volontà, che subordina ai motivi, precedentemente affermatisi come permanenti, i motivi transitorii ed accidentali.

La *personalità morale* di un uomo si identifica appunto con questa volontà continuativa, resultante dei fattori organici e degli elementi assorbiti dall'ambiente esterno. Niun dubbio sorge a questo proposito quando consideriamo la persona altrui; quando invece ci riferiamo a noi stessi, c'inganna facilmente lo sdoppiamento che facciamo dell'io, prendendolo una volta come oggetto, cioè confondendoci, noi soggetto di azione, colla rappresentazione che ci facciamo di noi medesimi.

Una volta che si consideri il nostro io, come oggetto di una rappresentazione, è facile convincersi che non si può attribuire a questa, un contenuto oltrepassante l'idea collettiva di ciò che è relativamente permanente nelle nostre volizioni.

Poichè, se si contrappone a codesta realtà, riguardata come *apparente* e *relativa*, una *sostanza assoluta* o *anima*, nella quale si faccia consistere la *personalità etica*, si ricade in uno di quei processi infiniti di definizione, la cui vacuità fu già messa in luce.

Disgraziatamente questa veduta trascendentale dell'anima dominò fino ai nostri giorni la controversia del libero arbitrio, la cui storia si riattacca a quella del problema religioso della predestinazione e della grazia.

Tale aspetto della questione domina ancora il pensiero del LEIBNIZ nella « Teodicea ».

Onde il filosofo, pur contrapponendo al fatalismo esterno spinoziano una chiara visione del determinismo psicologico interno, doveva attribuire alla *libertà*, intesa come *spontaneità dell'essere intelligente*, un senso metafisico trascendentale.

Questo senso appunto si mostra, con grande nettezza nella evoluzione ulteriore che il determinismo ha ricevuto dalla filosofia del KANT: determinismo fenomenico contrapposto ad autonomia noumenica; cioè volontà libera in sè, per quanto si guardi alla causa intelligibile del volere (?!), ma determinata secondo leggi immutabili, nelle sue manifestazioni. Lo sviluppo naturale di questa distinzione porta infine alla dottrina dello SCHOPENHAUER: la volontà, trascendentalmente intesa come al di fuori dei suoi atti, fuori dello spazio e del tempo, viene a prendere il posto della *sostanza*, o della *cosa in sè*, idea della quale già ravvisammo il fondamento antropomorfico.

Queste ultime conclusioni della filosofia classica, sono ai nostri occhi molto istruttive. Poichè ne esce fuori, per una parte, il riconoscimento del determinismo psicologico, nel suo senso umano e positivo; per l'altra la dimostrazione che il problema del libero arbitrio non interessa la ragione pratica, se non in quanto si creda necessario un fondamento trascendente della morale.

Ma, considerata come priva di senso la rappresentazione trascendentale di una volontà e di una personalità etica al di là delle sue manifestazioni, risulta chiaramente che la tesi del libero volere non contraddice al determinismo.

L'una e l'altra tesi conservano nei rispettivi campi tutto il loro valore. La possibilità di una estensione illimitata della scienza psicologica, non toglie l'*apprezzamento* delle azioni umane, in quanto esse sono *volute* o *non volute* per riguardo ai dati *fini*.

Vero è che la tesi deterministica ha potuto esercitare una influenza scoraggiante sopra alcune deboli volontà, in seguito ad erronea interpretazione. STUART MILL stesso ha subìto tale effetto e ci attesta di essersene liberato in un passo significativo della sua Autobiografia : « La teoria che per la prima volta io comprendeva nel suo vero senso, non apparisce più scoraggiante, ed, oltre al sollievo che ne venne al mio spirito, cessai di soffrire del peso così grave per chi mira a riformare le opinioni altrui, di ritenere che una dottrina sia vera e la contraria moralmente benefica ».

Ma a simili effetti di erronea interpretazione, si possono contrapporre i vantaggi che una volontà non inferma può tratte dalla teoria deterministica rettamene intesa; imperocchè l'esatta conoscenza del peso relativo dei motivi che ci spingono alle deliberazioni, l'apprezzamento adeguato del modo come siamo capaci di reagire agli stimoli e d'inibirne gli effetti, c'insegna a rafforzare la nostra volontà stessa, operando sopra noi medesimi in modo da assicurare il trionfo della nostra personalità permanente sopra le mutabili eccitazioni esterne.

§ 39. **Fisicismo.**

Sgombrato il terreno dalle difficoltà psicologico-morali, ritorniamo alla considerazione scientifica dei fenomeni della vita.

Il determinismo implica genericamente la più estesa possibilità di cogliere nella serie di questi fenomeni degli invariabili rapporti di coesistenza e di successione; l'ipotesi meccanica aggiunge una idea limitativa, in quanto suggerisce la possibilità di scegliere come circostanze determinanti, dei dati aventi un significato *fisico*, all'infuori della vita.

Questo modo particolare d'intendere il determinismo biologico prende il nome di *fisicismo*; esso può concretarsi più precisamente nelle seguenti richieste :

1) che la *spiegazione biologica* debba rappresentare il fenomeno proposto come il conseguente o il connesso invariabile di dati fisico-chimici (calore, elettricità, movimento ecc.) concorrenti secondo certi rapporti quantitativi;

2) che quindi il concorso dei suddetti fenomeni fisico-chimici, dia luogo ad una condizione nella quale resti determinato un fenomeno analogo a quello proposto, anche *fuori della vita*.

E quando il *fisicismo* si consideri non tanto come aspirazione remota,

quanto nella sua efficienza pratica relativamente allo stato attuale della Scienza, si aggiungono implicitamente le seguenti ipotesi:

3) che la discriminazione analitica delle cause fisiche dei fenomeni della vita possa ridursi ad un numero di elementi non troppo grande;

4) che le condizioni notevoli di cui si deve tener conto nella causalità fisica, non vengano alterate ove si considerino gli stessi fenomeni nell'ambito della vita.

Ora appunto a quest'ultima veduta contraddicono i resultati degli studii di cinquant'anni; i quali infirmano perciò il fisicismo, nel senso pratico che viene definito dalle precedenti richieste, all'infuori della credenza in un progresso remotissimo.

Risulta infatti che *non si può trattare la Fisica biologica facendo astrazione dalla condizione essenziale della vita.*

Soltanto pochi rapporti fisici generali, sovrastanti alla varietà delle condizioni, si trovano verificati senza mutamento nel dominio biologico; tali p. es. la conservazione della materia o dell'energia. Ma nelle leggi meno estese che si riferiscono alla diffusione o all'osmosi o alla conducibilità elettrica ecc. si incontrano ad ogni passo eccezioni e contraddizioni apparenti.

Ecco qui una *torpedine*, vivente bottiglia di *Leyda*, la cui carica elettrica si compie in circostanze paradossali. Mentre il funzionamento delle macchine elettriche è impedito così facilmente dall'umidità dell'isolatore, vediamo una carica che non si perde nell'acqua circostante di cui pure i tessuti dell'animale sono imbevuti!

Non si potrebbe negare o attenuare l'importanza di simili fatti ben accertati quand'anche si trattasse di rare eccezioni, ma a fortiori dobbiamo tenerne conto dato il loro numero e la loro rilevante frequenza, e dato che si tratta di differenze le quali si palesano già nei primi gradi della vita. La Fisiologia generale della cellula, quale MAX VERWORN ce la presenta nel suo eccellente trattato, e la Fisica dei tessuti, ne porgono esempii molteplici e caratteristici.

Citiamone uno soltanto. Le cellule vive della vessica impediscono la diffusione dell'acqua; eppure non si trova una membrana impermeabile che spieghi l'ostacolo! Bisogna dire che un tessuto umido si oppone al passaggio dell'acqua *in forza della vita*, poichè perde questa proprietà tostochè sopravviene la morte.

Fenomeni di tal genere possono sempre conciliarsi con un fisicismo teorico, ove si postuli il sovrapporsi di rapporti troppo complessi per essere decomposti negli ipotetici elementi fisici; ma essi suggeriscono un atteggiamento positivo del pensiero che, rinunziando almeno provvisoriamente ad una *spiegazione analitica*, si volge ad una *spiegazione sintetica* nella quale il *fatto* di vivere sia preso come condizione fondamentale ad esprimere il resultato medio delle circostanze elementari sovrapposte.

Or dunque, in luogo di scegliere esclusivamente come determinanti dei dati fisici, si prenderanno tutte le circostanze notevoli che si presentano connesse alla vita, senza indagare la loro riduzione ulteriore; ed in luogo di semplificare arbitrariamente a priori il determinismo fisico nei mezzi viventi, si cercherà di riconoscere le differenze caratteristiche atte a porgere nel loro insieme una *definizione positiva della vita*.

A questo scopo si rivolgono fra l'altre alcune belle ricerche del nostro G. GALEOTTI, dalle quali risulta che il plasma vivente impedisce la diffusione di certe sostanze, che esso vieta in generale lo stabilirsi dell'equilibrio osmotico, ed in certi casi esercita una particolare opposizione agli ioni mossi da forze elettromotrici.

§ 40. **Spiegazione teologica.**

In ciò che precede ci siamo riferiti soprattutto ai fenomeni fisici svolgentisi in un mezzo vivente; a più forte ragione emerge quindi la necessità di una spiegazione sintetica dei fenomeni propriamente fisiologici. La nostra critica fa vedere che un tal modo di spiegazione non contraddice all'ipotesi meccanica ed al fisicismo teorico che ne deriva, purchè si tolga a questo ogni significato pratico come indirizzo di ricerca attuale.

Ma si tratta ora di riconoscere se almeno il fisicismo teorico non imponga qualche limite alla spiegazione accolta in Fisiologia, ed in ispecie se esso non implichi di riguardare come priva di senso ogni *spiegazione teleologica*.

Constatiamo anzitutto il fatto che dà origine al problema.

La maggior parte delle conoscenze fisiologiche ricevono una forma inversa di quella dove ci rappresentiamo un nesso fra cause ed effetti. Vi è luogo a riscontrare tale circostanza quasi in ogni ordine di fenomeni della vita, e non soltanto nello studio sintetico dell'essere vivente, bensì anche nella Fisiologia dei tessuti.

Se p. es. si voglia comprendere di quali sostanze un tessuto ostacoli la diffusione, si è indotti a fare appello all'idea di un *utile* o di un *bisogno* del plasma di reagire in un modo piuttosto che in un altro, come se l'antecedente potesse esser determinato dal conseguente anzichè viceversa. Questa stessa idea entra già nella cosidetta *legge della reazione cellulare*, la quale sembra porre il concetto del *fine* alla base di ogni *spiegazione* nelle scienze della vita.

Ma un tal modo di spiegare i fatti solleva gravi repugnanze in coloro che prendono come modello le scienze fisiche. Sembra a prima vista che fra la veduta teleologica ed il fisicismo, pur teoricamente compreso, sussista un contrasto irriducibile; ed i fisicisti ne deducono che ogni spiegazione teleologica debba essere rigorosamente eliminata come priva di senso.

Esamineremo fra un momento se il contrasto accennato possa comporsi;

osserviamo intanto che non si saprebbe veramente attenersi nella pratica ad una regola così semplice.

Infatti coloro che vi aderiscono non sono poi capaci di sostituire qualcos'altro alle numerose discriminazioni di casi senza legame apparente, cui il fisiologo perviene apprezzando certe differenze *in rapporto ai fini della vita*.

I fisicisti risponderanno che queste sono *spiegazioni verbali senza senso* e *senza valore*, un velo gettato sulla nostra ignoranza, che si può ben togliere senza rimpianto, se pure null'altro venga sostituito al suo posto.

Così sarebbe infatti se le espressioni teleologiche dovessero prendersi nel senso di un vitalismo mistico, confondendo il punto di vista rappresentativo della conoscenza e quello attivo della volontà.

Ma si può trovare in esse un significato positivo e perciò contestiamo sotto questo aspetto la critica dei fisicisti!

Non è vero che l'utile o il danno di un vivente sieno espressioni vuote di senso, poichè esse racchiudono un fatto che può essere sperimentalmente conosciuto.

Non è vero che le spiegazioni ove si fa appello all'idea che qualcosa risponde ad un fine della vita sieno prive di valore, poichè dall'invocare simili circostanze determinanti si ottengono in varii gruppi di fenomeni delle *previsioni significative*.

Ed è in vista di ciò che, nonostante tutte le repugnanze, la spiegazione teleologica permane nelle scienze della vita.

Resta soltanto da darne una conveniente interpretazione, e da mostrare che questa non implica più un irriducibile contrasto collo spirito del determinismo meccanico.

Distinguiamo due tipi di spiegazione in cui entra in diverso modo l'idea di un fine:

1) La spiegazione psicologica ove si considera un certo fine come motivo dell'azione volontaria di un vivente.

2) La spiegazione più propriamente biologica ove si considera la struttura di un organo in rapporto alla funzione che esso deve compiere, o in generale si cerca di rappresentarsi certi caratteri biologici o certe reazioni del plasma ecc. come rispondenti a certe utilità.

Il primo caso si lascia subito riattaccare al determinismo consueto, imperocchè riconosciamo come causa dell'azione non propriamente il fine proposto, ma la sua rappresentazione, che risulta dal rievocare ed associare in diversi modi delle sensazioni precedenti.

Il secondo caso difficilmente si riconduce al primo, a meno che non si ricorra all'ipotesi di una Provvidenza, la quale determini la realtà attuale subordinatamente allo scopo di un futuro, così come noi stessi foggiamo una macchina capace di esercitare certe funzioni.

Ora, chiunque voglia fare astrazione dal valore morale e religioso di una

simile ipotesi per giudicarla soltanto sotto l'aspetto conoscitivo, dovrà ammettere che essa non ha un valore scientifico, giacchè non ci abilita a previsioni oppure ci porge previsioni che trovansi indifferentemente vere o false, senza fornirci un criterio di scelta possibile.

Resta a vedere se le spiegazioni biologiche del secondo tipo possano accordarsi coll'idea che ci formiamo del determinismo, indipendentemente dall'ipotesi di un intervento provvidenziale.

L'accordo è effettivamente possibile se s'interpreti la spiegazione teleologica in un senso positivo, come esprimente un *primo grado di conoscenza*.

Invece di paragonare questa spiegazione a quella cui si mira nel più alto sviluppo della Fisica, dove dalle cause note si procede agli effetti ignoti, la paragoneremo alla spiegazione che nella Fisica stessa trova posto come primo grado della ricerca induttiva, quando si tratta di ricavare le ipotesi dalle osservazioni preliminari, cioè dall'effetto noto si vuol risalire alle cause.

Anche i problemi fisici possono assumere in tal senso un aspetto teleologico. E basti trarre all'uopo qualche esempio dalla Meccanica e dall'Astronomia.

Si possono immaginare in vario modo dei sistemi meccanici che si trovino in un certo stato di equilibrio stabile; ogni piccolo movimento prodotto da una perturbazione qualsiasi genera forze riconducenti il sistema alla posizione iniziale. In simili casi la stabilità essendo data come una condizione da soddisfare, il problema è di cercare le forze che ne spiegano la sussistenza.

In un senso esteso della parola, anche il sistema planetario ha una stabilità, verificata praticamente entro i limiti dell'osservazione, la quale si affacciò agli astronomi come un problema da risolvere.

Ed il problema fu sciolto, non da NEWTON che dubitò che le mutue attrazioni planetarie dovessero distruggere il regime permanente del sistema, bensì da LAPLACE che riconobbe come lo effetto delle perturbazioni sugli elementi delle orbite tenda a compensarsi periodicamente, all'infuori d'una piccola variazione secolare; onde fu ristabilita la superba armonia della legge che il suo autore medesimo aveva rotto coll'ipotesi di un intervento provvidenziale.

Un'altra questione analoga è la stabilità dell'anello di Saturno. Essa costituisce un fatto che possiamo rappresentarci come resultato di cause ignote, che si tratta di trovare. Ora se si fa la ipotesi più semplice che l'anello sia costituito da una materia compatta, e si valutano le forze attrattive esercitantisi fra le varie parti del corpo e l'azione su di esso della massa di Saturno, non ne risulta un equilibrio stabile; perciò appunto si è indotti a discutere ipotesi diverse, cercando una disposizione della materia che risponda alle condizioni poste.

Queste condizioni, prese così come un fine da soddisfare, preesistono alla disposizione incognita della massa dell'anello, soltanto nell'ordine delle nostre conoscenze, il quale si presenta come inverso di quello che ci raffiguriamo essere l'ordine reale.

Dopo questi esempii riesce più agevole comprendere il procedimento esplicativo della Biologia, ove si parla della rispondenza di un organo ad una funzione, o di un modo di reagire in rapporto con un fine utile. Si possono trasformare queste espressioni in guisa da togliere ogni apparenza di contrasto col determinismo fisico. Si tratta invero di ritenere che, fra i molteplici elementi del fatto, la *vita* ci appare sinteticamente data *prima* che i suoi supposti fattori, non già nella realtà ma nell'ordine delle conoscenze; quindi dalla funzione nota risaliamo ai caratteri dell'organo capaci di spiegarla; dalla circostanza che il plasma vive inferiamo come probabilissima una certa facoltà di esso di reagire nel senso utile, almeno finchè si tratti di stimoli che non ne cagionano la morte ecc.

Un tale procedimento esplicativo sarebbe perfetto e si convertirebbe in una spiegazione del tipo fisico, se nel risalire dall'effetto dato alle cause si riuscisse a determinare l'intiero gruppo delle cause notevoli, il cui concorso consente la riproduzione sperimentale del fenomeno. Ciò non si è per anco ottenuto nelle spiegazioni propriamente fisiologiche, ma nondimeno vi è in esse un grado di conoscenza positiva che le precedenti osservazioni mettono in luce.

Giungiamo invero a risalire dagli effetti, che ci rappresentiamo come « fini » nella vita, a talune fra le cause prossime che concorrono a produrli, e da queste via via alle più nascoste condizioni concomitanti e alle cause più lontane.

Soltanto qui la catena è più complicata e più lunga e non ci è dato invertire la serie, così come non è dato al chimico di spiegare un quadro di Raffaello coll'analisi dei colori che lo compongono.

§ 41. **La vita e i principii termodinamici.**

Fino ad ora non abbiamo trovato alcuna irriducibile contraddizione fra l'ipotesi meccanica e le scienze della vita.

Per proseguire il nostro esame dobbiamo sottoporre ad una verifica i principii della Fisica che risultano dalle ipotesi meccaniche più generali. Sorvoliamo sulla *conservazione della materia*, che permane nella vita, e parliamo dei principii energetici ed in ispecie di quelli della Termodinamica.

Anzitutto il *principio della conservazione dell'energia è verificato anche nei fenomeni della vita.*

All'infuori di ciò non si sa nulla di positivo.

Sarebbe molto interessante istituire ricerche approfondite in ordine al secondo principio della Termodinamica.

Nell'ipotesi meccanica, questo appare come un effetto di media in un sistema *disorganizzato*. Ora nel nostro caso l'applicazione del postulato della media solleva gravi dubbi.

Che cosa esprime finalmente codesto postulato? Esso traduce con un computo numerico l'ipotesi di una certa *regolarità statistica* di un gran numero

di fenomeni, le cui differenze non possono essere riattaccate a *cause sistematiche*. La regolarità statica simula bene lo stato di ciò che *appare omogeneo*, o tende ad una certa omogeneità. Ma il carattere proprio della materia vivente è all'opposto una intima *eterogeneità*; il pensiero che questa ricopra una *organizzazione del movimento*, si affaccia molto naturale.

Ma d'altra parte rimane difficile di accordare una tale ipotesi col regime permanente della vita. Accanto ad un sistema cinetico organizzato sembrano possibili infiniti sistemi disorganizzati, per modo che il passaggio dall'uno agli altri corrisponda a variazioni infinitesime; perciò non si saprebbe spiegare la persistenza di uno stato organizzato.

Come si vede l'ipotesi meccanica da sola non basterebbe forse a dedurre la validità del postulato di CLAUSIUS nella vita, ma lo fa ritenere probabile.

Ora, comunque si apprezzino le ragioni teoriche, la risposta non può venire che dall'esperienza; l'investigazione termodinamica dei processi fisiologici deve risolvere il problema *se il postulato di Clausius sussista ancora nei fenomeni della vita*.

La questione sembra più accessibile dal lato dei vegetali; ed alcuni resultati intorno all'intervento della luce nelle trasformazioni chimiche che ne accompagnano i processi, lasciano aspettare una risposta affermativa.

§ 42. **L'ipotesi meccanica e i problemi della evoluzione.**

Emerge dall'analisi precedente che, almeno nello stato di sviluppo attuale, *le scienze della vita non recano alcuna contraddizione all'ipotesi meccanica*.

Ma questa conclusione è puramente negativa, e si tratta ora di apprezzare il *valore positivo* dell'ipotesi stessa.

La nostra tesi è che l'*ipotesi meccanica può ritenersi indifferente al progresso della Biologia*.

Anzitutto la discussione del § 39 ha mostrato che la veduta di un fisicismo teorico suggerita dal modello meccanico, non può interpretarsi come un indirizzo pratico di ricerca: la remota possibilità del nominato modello resta sotto questo riguardo senza influenza sopra il tipo della spiegazione nei fenomeni della vita.

In secondo luogo è facile constatare che l'ipotesi meccanica nella sua generalità non determinata è incapace di risolvere in un senso piuttosto che in un altro i generali problemi della Biologia, sia p. es. di portare un appoggio all'una o all'altra fra le correnti di pensiero, *epigenetiche* e *preformistiche*, che entrano in campo a spiegare l'*evoluzione organica*.

Si possono immaginare diverse serie di modelli meccanici, dotati entro certi limiti di un certo regime permanente, in guisa da dar luogo ai seguenti casi:

1) Ogni meccanismo ripassa periodicamente per le stesse fasi a meno

di una variazione accidentale, che si compensa statisticamente per i varii meccanismi della serie; ma forze esterne imprimono ad ogni meccanismo una variazione in un senso determinato, producendo una evoluzione del tipo medio della serie.

2) Sussiste ancora la periodicità statistica dei meccanismi della serie; ma le forze esterne aggiunte imprimono al tipo medio una evoluzione determinata, non perchè sieno capaci di modificare profondamente lo sviluppo del meccanismo singolo, ma perchè operano una scelta tendendo a distruggere il regime permanente di quei meccanismi le cui variazioni procedono in un certo senso.

3) I meccanismi della serie presentano una quasi periodicità; il tipo medio si ripete pure quasi periodicamente, ma alla variazione rapida periodica, si sovrappone una variazione lenta in un senso determinato.

Orbene, a parte la difficoltà di precisare questi modelli, si scorgerà facilmente che essi mostrano la possibilità di conciliare indifferentemente col meccanismo, le tre specie d'ipotesi fondamentali invocate a spiegare l'evoluzione degli esseri viventi, nelle quali si attribuisce un diverso peso alle cause di variazione *interne* ed *esterne* (ambiente) ([1]). Tali sono le ipotesi seguenti:

1) Le variazioni ereditarie individuali procedono in un senso indifferente per modo che dai fattori interni risulti una rigorosa periodicità statistica di caratteri cioè la costanza della specie, ma l'*ambiente modifica il vivente*, ed i caratteri acquisiti per adattamento si trasmettono colla eredità alle nuove generazioni (Ipotesi di LAMARK).

2) Le variazioni individuali interne darebbero ancora come resultato un compenso statistico cioè la fissità del tipo medio, ma mercè la lotta per la vita l'*ambiente sceglie le variazioni utili*, che si trasmettono ancora coll'eredità in guisa da dare all'evoluzione della specie un senso determinato (Ipotesi di DARWIN).

3) La variazioni ereditarie interne non si compensano rigorosamente nella media, ma procedono in un verso determinato (*ortogenesi di* EIMER); cioè si ha uno sviluppo della specie perfettamente analogo allo sviluppo ontogenetico (la continuità del plasma germinale di WEISMANN porta appunto il con-

([1]) È appena necessario rilevare che, indipendentemente dall'apprezzamento dei suoi fattori, l'*ipotesi dell'evoluzione* è accettata generalmente in base ai seguenti motivi:

1) Le prove dirette fornite dalla Paleontologia.

2) Le prove indirette che si traggono dalla Geografia botanica e zoologica.

3) L'evoluzione spiega una serie di fatti anatomici e zoologici, p. es. gli organi rudimentali ecc.

4) L'evoluzione porge un criterio direttivo sintetico nella ricerca scientifica, ed ha perciò un valore efficiente nei progressi odierni delle scienze naturali.

cetto che la specie sia come un individuo di lunga vita). In questa ipotesi l'ambiente ha un ufficio secondario e piuttosto negativo; la scelta naturale agisce d'ordinario come un modo di *conservazione* della specie (PFEFFER), la cui efficienza risulta indirettamente provata da certe regressioni, come quelle delle talpe cieche (*Panmixia*).

§ 43. **Irrilevanza della spiegazione meccanica in Biologia.**

Le considerazioni precedenti mettono in vista che l'ipotesi meccanica, presa nella sua generica indeterminatezza, è indifferente al progresso delle scienze della vita.

Ma vi è di più. A parte la estrema difficoltà d'indagare l'ipotetico meccanismo per ogni dato ordine di fenomeni della vita, vi è luogo a domandarsi qual valore potrebbe avere, relativamente alle questioni che c'interessano, la descrizione particolare di quello e la conoscenza dei rapporti quantitativi connessivi.

Abbiamo già rilevato quale sia il valore proprio della spiegazione meccanica dei fenomeni fisici. Le difficoltà di una spiegazione integrale sono divise in due parti:

1) Nell'una si tratta di assegnare, mercè un'ipotesi meccanica fondamentale, i rapporti fra certi dati, astrattamente presi come *quantità*;

2) nell'altra d'*interpretare* codesti rapporti mediante le *ipotesi complementari*, aggiungendo alle previsioni direttamente quantitative le *previsioni qualitative*.

Il meccanismo dei fenomeni non ne esaurisce la conoscenza neppure nei casi in cui esso può essere più precisamente descritto: le vibrazioni di una corda che il matematico rappresenta come fatto ottico, mediante la serie FOURIER, contengono dei rapporti d'armonia, che possono bene associarsi alla forma della serie, ma costituiscono sempre una *interpretazione* o *associazione aggiunta* alle sensazioni visive in essa simboleggiate.

Ora la soluzione del problema 1) ha un'importanza relativa tanto più grande quando la maggior parte delle domande poste si riferiscono a *misure*: all'opposto invece, le cosidette equazioni determinatrici esprimenti l'ipotesi meccanica fondamentale, divengono tanto meno significative quanto più cresca l'uso delle ipotesi complementari, che soccorrono alla loro interpretazione.

Ebbene, se classifichiamo i problemi fisici in una serie dove l'*interesse* della spiegazione meccanica vada decrescendo, *i problemi della vita si presenteranno come caso limite nella serie suddetta*.

La spiegazione meccanica apparisce dunque come irrilevante in questo campo della Scienza

È interessante raffrontare la conclusione precedente a quella cui DU BOIS REYMOND venne condotto, trattando il problema meccanico della vita.

L'impossibilità di esaurire il fatto biologico nella spiegazione meccanica apparve chiara all'illustre filosofo; ma questa impossibilità venne interpretata da lui in un senso agnostico!

Ebbene ciò dipende soltanto dall'avere accolto una veduta inadeguata della spiegazione scientifica, costretta nei limiti arbitrarii di una Metafisica quantitativa.

Il problema è insolubile perchè è posto male. E la pretesa conclusione agnostica si riduce al riconoscimento che i rapporti formanti oggetto delle previsioni biologiche, *in una parte minore* dei rapporti fisici, possono essere compresi come rapporti quantitativi, anche se si ammetta la possibilità di un modello meccanico.

§ 44. **Conclusione.**

La nostra conclusione è che, nello stato attuale delle conoscenze, l'*ipotesi meccanica appare non contraddittoria ai fenomeni della vita ma indifferente per lo studio di questi.*

Tuttavia la suddetta ipotesi ebbe in passato un importante ufficio, in primo luogo perchè in una forma netta affermò l'indipendenza del sapere dal sentimento (cfr. § 36), in secondo luogo come unificatrice delle vedute scientifiche. Attraverso il meccanismo nascosto si è imparato a scorgere anche nella vita un oggetto proprio di Scienza, ed a comprendere l'intimo nesso del procedimento che vien messo in opera in campi di studio separati soltanto per una necessità di divisione del lavoro, ma sovrapposti nella previsione concreta, cioè uniti nella realtà.

Per rendersi conto adeguatamente del resultato conseguito in tal modo, è d'uopo riportarsi ai tempi di DESCARTES, quando le idee di HARVEY sulla circolazione del sangue incontravano ostacolo nei pregiudizii correnti sulla *forza dell'anima*, cui si faceva appello in ogni processo della vita.

Fu immenso progresso aver compreso che vi è una Fisica sola, la quale si estende senza arresto ai fenomeni vitali; e fu magnifica intuizione approssimata quella che portò a ritenere i fatti fisici come leggi semplici ed uniformi sovrastanti alla varietà delle condizioni.

L'effetto complicatore di queste è una veduta correttiva, da trascurare in una prima approssimazione.

Risulta di qui un giusto apprezzamento della tendenza unificatrice del meccanismo; essa porge una rappresentazione adeguata allo sviluppo iniziale delle scienze della vita; soltanto da un punto di vista più progredito appare che la veduta unificata è costruita con criteri un po' ristretti ed unilaterali, poichè si accoglie come perfetto e generale il tipo di una scienza più sviluppata

ed a questo si pretende di subordinare troppo rigidamente ogni altra forma di sapere.

Quindi la veduta della filosofia meccanica viene modificata dai progressi della Biologia, la quale reagendo a sua volta sulla Fisica, ci prepara a comprendere una unificazione superiore, cioè un tipo di Scienza più perfetto e generale, che contenga le varie forme particolari separate dalle esigenze della Tecnica.

Questo tipo superiore, adeguato ai varii dominii del sapere, non è un rigido schema di disposizione dommatica, e neppure una stratificazione di acquisti che si aggiungano semplicemente l'uno all'altro. È *processo di associazione e d'astrazione* che opera sui dati sensibili costruendo i concetti rappresentativi degli invarianti reali; è sviluppo di composizione e di scomposizione, che si esplica nelle due fasi induttiva e deduttiva e riesce ad una *progressiva estensione e correzione delle nostre previsioni*.

Come nelle varie forme dell'evoluzione della vita, lo sviluppo anzidetto può essere più lento e lungo, o più rapido e breve; le fasi induttiva e deduttiva possono disegnarsi come momenti distinti del processo scientifico, siccome bene si osserva nella Fisica, o all'opposto intrecciarsi e quasi confondersi come accade nella Biologia.

Ora il confronto è interessante sotto due aspetti reciproci: soltanto dalla Fisica ci è dato trarre una veduta del grado di perfezione cui potranno tendere in avvenire le scienze della vita; ma la enorme complicazione di queste, e la instabilità che ne deriva nelle spiegazioni biologiche, ci rendono più chiaro il movimento della Scienza, che rispetto a taluni ordini di fenomeni fisici riesce visibile soltanto nei secoli. Giungiamo in tal modo a comprendere che la *conoscenza esatta* è soltanto una conoscenza *bene approssimata*, la quale potrà essere tenuta come soddisfacente soltanto per riguardo ad una certa cerchia di previsioni, ma rispetto ad una cerchia più estesa dovrà subire tosto o tardi una correzione, ove si aggiungano le condizioni complicatrici trascurate.

Richiamiamo un esempio da argomenti già innanzi trattati.

La Dinamica di GALILEI-NEWTON sembra richiedere oggi, dopo due secoli, un'ipotesi correttiva in questo senso: la distinzione astratta di certi dati determinanti del moto, *interni* ed *esterni* al corpo mobile, viene integrata con un postulato di *eredità* (influenza determinante del moto passato) o di *solidarietà* del campo di moto (§ 33).

Ebbene le parole stesse con cui si designa l'ipotesi correttiva alludono all'analogia con certi ordini di circostanze determinanti che appariscono nella vita. I biologi che studiano l'evoluzione delle specie organiche, tendono appunto a separare (come nel movimento) i fattori *interni* ed *esterni* della variazione (preformismo ed epigenesi), e fanno continuamente appello all'idea della eredità e alla solidarietà degli organi. In uno studio più complicato, il punto

È interessante raffrontare la conclusione precedente a quella cui DU BOIS REYMOND venne condotto, trattando il problema meccanico della vita.

L'impossibilità di esaurire il fatto biologico nella spiegazione meccanica apparve chiara all'illustre filosofo; ma questa impossibilità venne interpretata da lui in un senso agnostico!

Ebbene ciò dipende soltanto dall'avere accolto una veduta inadeguata della spiegazione scientifica, costretta nei limiti arbitrarii di una Metafisica quantitativa.

Il problema è insolubile perchè è posto male. E la pretesa conclusione agnostica si riduce al riconoscimento che i rapporti formanti oggetto delle previsioni biologiche, *in una parte minore* dei rapporti fisici, possono essere compresi come rapporti quantitativi, anche se si ammetta la possibilità di un modello meccanico.

§ 44. **Conclusione.**

La nostra conclusione è che, nello stato attuale delle conoscenze, l'*ipotesi meccanica appare non contraddittoria ai fenomeni della vita ma indifferente per lo studio di questi.*

Tuttavia la suddetta ipotesi ebbe in passato un importante ufficio, in primo luogo perchè in una forma netta affermò l'indipendenza del sapere dal sentimento (cfr. § 36), in secondo luogo come unificatrice delle vedute scientifiche. Attraverso il meccanismo nascosto si è imparato a scorgere anche nella vita un oggetto proprio di Scienza, ed a comprendere l'intimo nesso del procedimento che vien messo in opera in campi di studio separati soltanto per una necessità di divisione del lavoro, ma sovrapposti nella previsione concreta, cioè uniti nella realtà.

Per rendersi conto adeguatamente del resultato conseguito in tal modo, è d'uopo riportarsi ai tempi di DESCARTES, quando le idee di HARVEY sulla circolazione del sangue incontravano ostacolo nei pregiudizii correnti sulla *forza dell'anima*, cui si faceva appello in ogni processo della vita.

Fu immenso progresso aver compreso che vi è una Fisica sola, la quale si estende senza arresto ai fenomeni vitali; e fu magnifica intuizione approssimata quella che portò a ritenere i fatti fisici come leggi semplici ed uniformi sovrastanti alla varietà delle condizioni.

L'effetto complicatore di queste è una veduta correttiva, da trascurare in una prima approssimazione.

Risulta di qui un giusto apprezzamento della tendenza unificatrice del meccanismo: essa porge una rappresentazione adeguata allo sviluppo iniziale delle scienze della vita; soltanto da un punto di vista più progredito appare che la veduta unificata è costruita con criteri un po' ristretti ed unilaterali, poichè si accoglie come perfetto e generale il tipo di una scienza più sviluppata

ed a questo si pretende di subordinare troppo rigidamente ogni altra forma di sapere.

Quindi la veduta della filosofia meccanica viene modificata dai progressi della Biologia, la quale reagendo a sua volta sulla Fisica, ci prepara a comprendere una unificazione superiore, cioè un tipo di Scienza più perfetto e generale, che contenga le varie forme particolari separate dalle esigenze della Tecnica.

Questo tipo superiore, adeguato ai varii dominii del sapere, non è un rigido schema di disposizione dommatica, e neppure una stratificazione di acquisti che si aggiungano semplicemente l'uno all'altro. È *processo di associazione e d'astrazione* che opera sui dati sensibili costruendo i concetti rappresentativi degli invarianti reali; è sviluppo di composizione e di scomposizione, che si esplica nelle due fasi induttiva e deduttiva e riesce ad una *progressiva estensione e correzione delle nostre previsioni.*

Come nelle varie forme dell'evoluzione della vita, lo sviluppo anzidetto può essere più lento e lungo, o più rapido e breve; le fasi induttiva e deduttiva possono disegnarsi come momenti distinti del processo scientifico, siccome bene si osserva nella Fisica, o all'opposto intrecciarsi e quasi confondersi come accade nella Biologia.

Ora il confronto è interessante sotto due aspetti reciproci: soltanto dalla Fisica ci è dato trarre una veduta del grado di perfezione cui potranno tendere in avvenire le scienze della vita; ma la enorme complicazione di queste, e la instabilità che ne deriva nelle spiegazioni biologiche, ci rendono più chiaro il movimento della Scienza, che rispetto a taluni ordini di fenomeni fisici riesce visibile soltanto nei secoli. Giungiamo in tal modo a comprendere che la *conoscenza esatta* è soltanto una conoscenza *bene approssimata*, la quale potrà essere tenuta come soddisfacente soltanto per riguardo ad una certa cerchia di previsioni, ma rispetto ad una cerchia più estesa dovrà subire tosto o tardi una correzione, ove si aggiungano le condizioni complicatrici trascurate.

Richiamiamo un esempio da argomenti già innanzi trattati.

La Dinamica di GALILEI-NEWTON sembra richiedere oggi, dopo due secoli, un'ipotesi correttiva in questo senso: la distinzione astratta di certi dati determinanti del moto, *interni* ed *esterni* al corpo mobile, viene integrata con un postulato di *eredità* (influenza determinante del moto passato) o di *solidarietà* del campo di moto (§ 33).

Ebbene le parole stesse con cui si designa l'ipotesi correttiva alludono all'analogia con certi ordini di circostanze determinanti che appariscono nella vita. I biologi che studiano l'evoluzione delle specie organiche, tendono appunto a separare (come nel movimento) i fattori *interni* ed *esterni* della variazione (preformismo ed epigenesi), e fanno continuamente appello all'idea della eredità e alla solidarietà degli organi. In uno studio più complicato, il punto

di vista sintetico si è dunque affacciato prima e s'impone con più evidenza; in una teoria apparentemente semplice esso si affaccia soltanto quando si chiede una precisione maggiore.

Così possiam dire che *lo sviluppo delle scienze della vita si presenta come una ricapitolazione abbreviata di quello delle scienze fisiche!*

30

20.

0.

0.

0.

30.